基于长方体盒型的异型纸盒曲面及曲拱结构变换

刘兰青，李 颖，蔡惠平
（北京印刷学院，北京 102600）

摘要：对多种常见纸包装曲面及曲拱结构设计进行了调查统计，讨论了 3 种基于长方体盒型的异型纸盒曲面及曲拱结构变换方式，并给出了由造型设计尺寸来计算其平面展开尺寸的必要参数，得出了适用于这些变换方式下的尺寸计算公式，有利于曲拱及曲面结构的计算机辅助设计算法的发展。

关键词：异型纸盒；曲面及曲拱；结构变换；结构设计；调查统计

中图分类号：TB482.2　**文献标识码：**A　**文章编号：**1001-3563(2012)01-0067-05

Structural Transformations of Curved or Arched Surface of Strange Carton Based on Cuboid Carton

LIU Lan-qing, LI Ying, CAI Hui-ping
(Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China)

Abstract: Structure design of various common packaging cartons with curved or arched surface was surveyed. The transformation methods of curved or arched structures based on classic cuboid carton were discussed. The necessary parameters for calculation of plan spreading dimension from modeling design dimension were provided. Dimension calculation equation applicable for the transformation modes was obtained. The purpose was to provide reference for development of CAD technology in designing cartons with curved or arched surface.

Key words: strange cartons; curved or arched surface; structure transformation; structure design; survey

纸包装曲面及曲拱的结构设计是指利用纸板的可弯折性，在基本纸盒盒型上进行局部或整体的特殊处理，使之在成型加工后具有一定的曲面或曲拱造型。该类设计属于异型纸盒的一个分支。异型纸盒造型优美，能给消费者带来兴趣和一定的精神享受，特殊形态的纸容器设计有其不可低估的商业价值[1-2]。

市面上，曲拱及曲面异型纸盒结构设计复杂多样，但有些复杂结构曲面曲拱设计可以视为由一些基本曲拱曲面元素结合而成。在设计曲拱结构时，工程师从美学和实用角度出发对产品造型尺寸有很直观的要求，但在设计平面展开图时往往由于变换关系不明确而进行大量的调整。因此，笔者着重对一些基于长方体盒型的异型纸盒曲面及曲拱的基本设计元素及其展开变换进行研究，以解决设计中尺寸计算的困难，从而提高设计曲线及曲拱结构的效率。

1　统计数据整理与分析

对多种涉及常见纸包装曲面及曲拱结构设计的书籍[4-8]以及一些实物商品进行了调查，在排除了结构雷同的设计后，获得了 65 件带有不同形式的曲面及曲拱结构设计样品。经过数据处理，将这些盒例中最能体现曲拱曲面特点的部分进行比较分析，抽象出了 3 种基本的曲面曲拱变换方式，见表 1，即顶点圆心

表 1　65 件样品中曲拱曲面特点可抽象成的结构变换方式种类

Tab.1 The classification of structural transforming methods among 65 samples

种类	顶点圆心重合	棱边底圆平行	双曲拱正交	其他
数量	11	21	23	10
所占比例/%	17	32	35	15

收稿日期：2011-03-25
基金项目：北京印刷学院大学生研究计划
作者简介：刘兰青（1990－），男，湖北宜昌人，北京印刷学院本科生，主攻包装设计。
通讯作者：蔡惠平（1958－），男，浙江人，北京印刷学院副教授，主要从事包装结构设计的教学与研究。

重合类、棱边底圆平行类、双曲拱正交类。

2 3类结构变换介绍以及展开图尺寸计算

2.1 顶点圆心重合类结构

顶点圆心重合类结构变换方式，是指基本盒型被一种底面圆心与该盒某一顶点相重合的圆锥或圆柱所截得的一类异型曲拱结构集合，见图1。当圆锥的

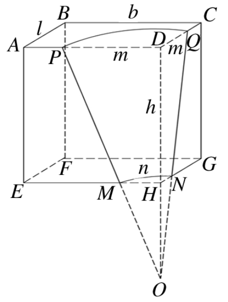


图1 顶点圆心重合类纸盒设计

Fig. 1 The carton design of vertex-center superposition type carton

顶点和底面圆半径(或圆柱体的底面圆半径)发生变化时，曲拱和曲面的形态会发生不同的变化，从而产生一系列曲拱曲面结构。

下面对由已知造型尺寸计算展开尺寸的方法进行讨论。已知在长方体 $ABCDEFGH$ 中，$AB=l$，$BC=b$，$AE=h$，圆锥底面圆心在 D 点，顶点在 O 点，截长方体于 $PQMN$ 曲面，其中 $PD=DQ=m$，$MH=NH=n$。

由于在工程上无法由压痕弧线折出一个平面和一个曲面相交，所以为了减小误差，弧 PQ 和弧 MN 处采用襟片粘合方式封合，从而保证在立体成型后上下底面的平整性。已知立体造型中参数 l,b,h,m,n，则绘制展开图时，弧 PQ 与弧 MN 所对应的圆心角 α 和 PM 与 EM 所夹角度 β 是必须求得的参数，见图2。

下面对 α,β 进行求解，在图1中，由圆弧长计算公式可知 $\widehat{PQ}=\frac{1}{2}\pi m$。

由△MOH 与△POD 相似可得，$OH=\frac{n}{m-n}h$，$OD=\frac{m}{m-n}h$，由勾股定理可得，圆锥母线 $r=OP=\frac{m}{m-n}\sqrt{h^2+(m-n)^2}$，则 $\alpha=\frac{\widehat{PQ}}{r}=\frac{(m-n)\pi}{2\sqrt{h^2+(m-n)^2}}$；

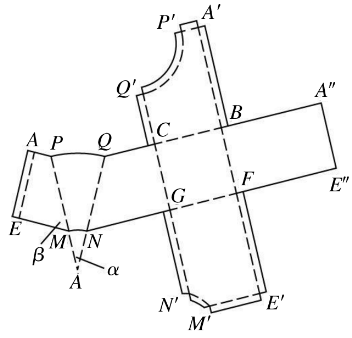


图2 顶点圆心重合纸盒类展开图

Fig. 2 Spreading picture of vertex-center superposition type carton

在平面 $AEHD$ 中可得 $\beta=\tan^{-1}\frac{h}{m-n}$。

2.2 棱边底圆平行类结构变换

棱边底面平行类结构变换方式是指基本盒型被一种轴线在盒型顶面内，并与同顶点的顶面中的2条棱线呈45°的圆柱体，所截得的一类异型曲拱结构集合，见图3。当圆柱体轴线的位置以及底圆半径发生

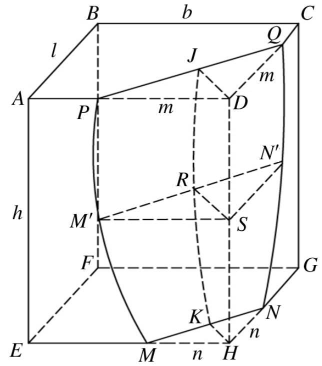


图3 棱边底圆平行类纸盒设计

Fig. 3 The carton design of edge side and bottom circle parallel cartons

变化时，曲拱和曲面的形态会发生不同的变化，从而产生一系列曲拱曲面结构。

下面对由已知造型尺寸计算展开尺寸的方法进行讨论。已知在长方体 $ABCDEFGH$ 中，$AB=l$，$BC=b$，$AE=h$，半径为 r 的圆柱体截长方体于 $PMNQ$ 曲面，点 J，K 分别为 PQ，MN 的中点，其中 $PD=DQ=m$，$MH=NH=n$。

已知立体造型中参数 l,b,h,m,n,r，则绘制展开图时(见图4)，$\widehat{PM}$与$\widehat{QN}$所对应的曲线方程及其长度 l_0，以及 PQ 至 MN 的距离 h_0 是必须求得的参数。

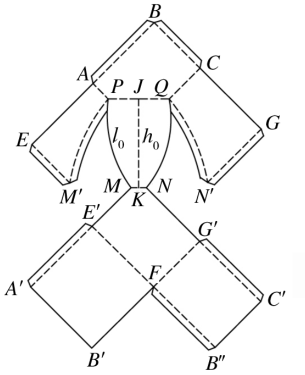


图 4 棱边底圆平行类纸盒展开图

Fig. 4 Spreading picture of edge side and bottom circle parallel cartons

h_0 的求法:在 $JKHD$ 截面中(见图 5),$\widehat{JK}$长度为 h_0,由勾股定理得 $r^2=h^2+\left[r-\frac{\sqrt{2}}{2}(m-n)\right]^2$,即 $r=\dfrac{h^2+\frac{1}{2}(m-n)^2}{\sqrt{2}(m-n)}$;圆心角为 $\alpha=\sin^{-1}\frac{h}{r}$;由弧长公式得 $h_0=\alpha r$。

l_0 的求法:在图 3 中,将平面 MHN 沿高度方向向上平移微小变量 Δh,形成新的平面 $SM'N'$,交 JK 于 R 点,设 $RK=\Delta h_0$。

在 $JKHD$ 平面中(见图 5),分别连接 DO,OR,

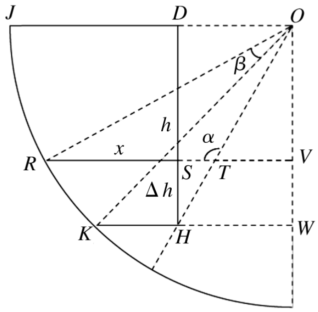


图 5 平面 $JKHD$ 示意图

Fig. 5 Diagrams of plane $JKHD$

OK,OH;延长 RV 交 OH 于 T,交半径于 V;延长 KH 交半径于 W,则有:

$$ST=DO\frac{\Delta h}{h}$$

$$OH=\sqrt{OD^2+DH^2}=\sqrt{\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2+h^2}$$

$$OT=OH-HT=\frac{h-\Delta h}{\Delta h}\sqrt{\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2+h^2}$$

设$\angle OTR=\alpha$,由诱导公式得:

$$\cos\alpha=\cos(\pi-\arccos\angle JOH)=$$

$$-\cos\angle JOH=-\frac{OD}{OH}=-\frac{\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2}{\sqrt{\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2+h^2}}$$

又由余弦定理 $OR^2=RT^2+OT^2-2RT\cdot OT\cdot\cos\alpha$,设 $RT=z$,$t=r-\frac{\sqrt{2}}{2}m>0$,则有:

$$z^2+2t\left(\frac{\Delta h}{h}+\frac{h-\Delta h}{h}t\right)z+\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2t^2+\left(\frac{h-\Delta h}{h}\right)^2\cdot(h^2+t^2)+2\,\frac{\Delta h}{h}\cdot\frac{h-\Delta h}{h}t^3-r^2=0$$

因为:$h\geqslant\Delta h\geqslant0$,$t\geqslant0$

则:$\Delta h=\sqrt{b^2-4ac}=6t^3\,\frac{\Delta h}{h}\cdot\frac{h-\Delta h}{h}+\left(\frac{h-\Delta h}{h}\right)^2\cdot(h^2+t^2)+r^2+4t^3>0$

由:$a>0$,$b=2t\left(\frac{\Delta h}{h}+\frac{h-\Delta h}{h}t\right)>0$,$x>0$

则:$z=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{1}{2}\cdot$

$$\left[\sqrt{6t^3\,\frac{\Delta h}{h}\cdot\frac{h-\Delta h}{h}+\left(\frac{h-\Delta h}{h}\right)^2(h^2+t^2)+r^2+4t^3}-2t\left(\frac{\Delta h}{h}+\frac{h-\Delta h}{h}t\right)\right]>0$$

设 $RS=x$,由$\triangle HST\backsim\triangle HDO$ 得:

$$ST=\frac{HS}{HD}DO=\frac{\Delta h}{h}\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)=\frac{\Delta h}{h}t$$

$$x=RT-ST=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6t^3\,\frac{\Delta h}{h}\cdot\frac{h-\Delta h}{h}+\left(\frac{h-\Delta h}{h}\right)^2(h^2+t^2)+r^2+4t^3}-2t\,\frac{\Delta h}{h}-\frac{h-\Delta h}{h}t^2$$

设$\angle ROK=\beta$,$\widehat{RK}=y$,则有:

$$\beta=\angle ROV-\angle KOW=\arccos\frac{h-\Delta h}{r}-\arccos\frac{h}{r}$$

由弧长公式可得:

$$y=\left(\arccos\frac{h-\Delta h}{r}-\arccos\frac{h}{r}\right)r$$

因此联立 x,y 的方程可得展开图中,l_0 的一叶随变量 Δh 变化的曲线方程:

$$\begin{cases} x=\Psi(\Delta h)=\dfrac{1}{2}\sqrt{6t^3\ \dfrac{\Delta h}{h}\cdot\dfrac{h-\Delta h}{h}+\left(\dfrac{h-\Delta h}{h}\right)^2(h^2+t^2)+r^2+4t^3}-2t\ \dfrac{\Delta h}{h}-\dfrac{h-\Delta h}{h}t^2 \\ y=\Phi(\Delta h)=\left(\arccos\dfrac{h-\Delta h}{r}-\arccos\dfrac{h}{r}\right)r \end{cases}$$

与此同时，对 l_0 的一叶随变量 Δh 变化的曲线方程积分，可得展开图中 l_0 一叶(l_{01})的长度：

$$l_{01}=\int_L f(x,y)\mathrm{d}S=$$

$$\int_0^h f\left[\Psi(\Delta h),\Phi(\Delta h)\right]\sqrt{\Psi'(\Delta h)^2+\Phi'(\Delta h)^2}\,\mathrm{d}\Delta h$$

同理，可求得 l_0 的另一叶(l_{02})，因此可以求得展开图中关键尺寸的 l_0 曲线。

2.3　双曲拱正交类结构变换

双曲拱正交类曲拱设计是指基本盒型的 4 块体板均为两两曲拱正交所得，并且这些曲面是曲率半径相同的圆柱体的一部分。

在已知双曲拱正交类造型设计(见图 6)的情况

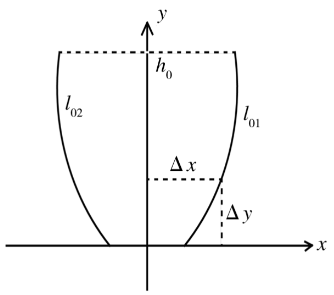
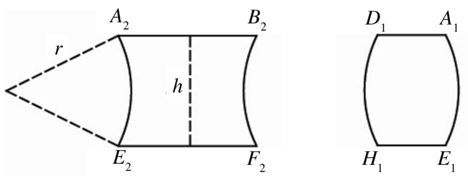


图 6　l_0 曲线的示意图

Fig. 6 Diagrams of curve l_0

下，在平面展开图中绘制$\overset{\frown}{AE}$，$\overset{\frown}{DH}$，$\overset{\frown}{CG}$，$\overset{\frown}{BF}$是作图的关键。

那么假设立体图在空间坐标系中，它在 XOZ 面上的投影见图 7a，在 YOZ 面上的投影见图 7b。



a　　　　b

图 7　立体对象分别在 XOZ 面和 YOZ 面上的投影

Fig. 7 Projection planes of spatial object on plane XOZ and YOZ respectively

已知弦 A_1E_1、弦 A_2E_2 同为 h，$\overset{\frown}{A_1E_1}$，$\overset{\frown}{A_2E_2}$所对应的半径同为 r(曲率半径一致)，则立体图中的$\overset{\frown}{AE}$即为 2 个曲面的交线，见图 8。

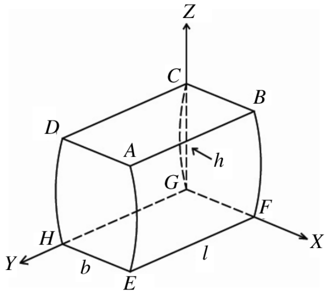


图 8　双曲拱正交类纸盒设计

Fig. 8 Carton design of double-arch surface intersecting

据空间几何知识，可以将弧 l_1 表示为：

$$y^2+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2=r^2$$

$$\left(x\geqslant 0,\sqrt{r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}\leqslant y\leqslant r,0\leqslant z\leqslant h\right)$$

可以将弧 l_2 表示为：

$$(x-r)^2+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2=r^2$$

$$\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}\leqslant x\leqslant r,0\leqslant z\leqslant h\right)$$

转化为参数方程：

$$\begin{cases} x=r+r\sin t \\ y=r\sin t \\ z=\dfrac{h}{2}+r\cos t \end{cases},t\in\left[\cos^{-1}\left(-\frac{h}{2t}\right),\cos^{-1}\left(\frac{h}{2t}\right)\right]$$

则交线 AE 的弧长为：

$$\overset{\frown}{AE}=\int_L \mathrm{d}S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$\int_{\cos^{-1}\left(-\frac{h}{2r}\right)}^{\cos^{-1}\left(\frac{h}{2r}\right)} r\sqrt{1+\cos^2 t\mathrm{d}t}$$

将已知参数 h，r 数值代入，利用 Mathematica 等数学软件进行积分运算，可以得到交线 AE 的弧长数值 l_0。在误差允许的情况下可以将$\overset{\frown}{AE}$近似看作半径为 R 的圆弧。经过一定的实验，发现从立体图转化到展开图时，立体图与展开图中的弧长与半径具有一定的近似比例关系，即$\dfrac{R}{r}=\dfrac{l_0}{h_0}$，可得 $R=\dfrac{l_0}{h_0}r$。

在展开图中，圆弧所对圆心角 $\alpha_0=2\sin^{-1}\dfrac{h_0}{2R}$，所

以可以绘制出展开图尺寸，见图 9。

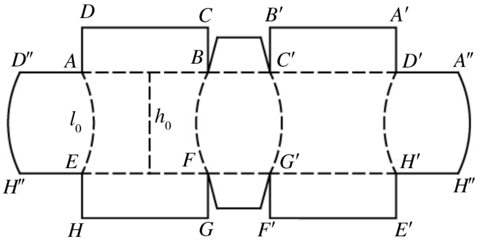


图 9　双曲拱正交类纸盒展开图

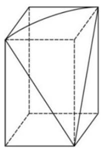
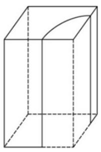
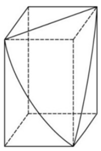
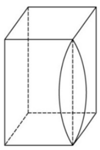
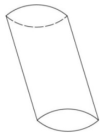
Fig. 9 Spreading picture of double-arch surface intersecting cartons

3　常见特例展示

不同的参数变化，会产生不同的曲拱效果，常见特例展示见表 2。

表 2　3 种结构变换方式的特例展示

Tab. 2 Display of the special cases of the three structural transformations

类别	顶点圆心重合类		棱边底圆平行类		双曲拱正交类
特殊尺寸	$l=b=m$ $n=0$	$m=n$	$l=b=m$ $n=0$	$m=n=0$	$b=0$
图例					

4　结语

引入立体几何的概念，对市面上的部分样品进行了调查总结，提出了 3 种曲线及曲拱的结构变换方式，分析了在这些变换方式下设计时所需要的关键尺寸计算的方法。通过对这些变量的调节可以设计出形态各异的曲面及曲拱结构盒型。在曲线及曲拱结构设计中，这 3 种数学变换模型不能够包含所有的设计方式，但是这些变换方式算法可以为今后利用 CAD 技术设计曲线及曲拱盒型提供参考和理论指导。

参考文献：

[1]　刘小静. 用破坏方法设计可折叠粘贴纸盒[J]. 包装工程，2006，27(5)：159－161.
LIU Xiao-jing. Design of Folded Paste Carton by Destroying Method[J]. Packaging Engineering，2006，27(5)：159－161.

[2]　韩炬，曹利杰. 异型折叠纸盒盒片结构设计方法[J]. 包装工程，2007，28(7)：75－76.
HAN Ju，CAO Li-jie. Structural Design Method of Strange Foldable Cartons[J]. Packaging Engineering，2007，28(7)：75－76.

[3]　孙诚. 包装结构设计[M]. 北京：中国轻工业出版社，1995.
SUN Cheng. Packaging Structure Design[M]. Beijing：China Light Industry Press，1995.

[4]　萧多皆. 纸盒包装设计指南[M]. 沈阳：辽宁美术出版社，2003.
XIAO Duo-jie. Guidance of Box Design[M]. Shenyang：Liaoning Art Press，2003.

[5]　陈磊. 纸盒包装设计原理：创意与结构设计手册[K]. 北京：人民美术出版社，2010.
CHEN Lei. The Principles of Carton Packaging Design：Handbook of Innovative and Structural Design[K]. Beijing：People's Fine Arts Publishing House，2010.

[6]　陈金明. 功能包装纸型设计[M]. 沈阳：辽宁科学技术出版社，2007.
CHEN Jin-ming. Functional Packaging Prototypes[M]. Shenyang：Liaoning Science and Technology Publishing House，2007.

[7]　鞠海. 包装模型[M]. 沈阳：辽宁科学技术出版社，2009.
JU Hai. Packaging Templates[M]. Shenyang：Liaoning Science and Techonology Publishing House，2009.

[8]　罗斯，怀本加. 包装结构设计大全[M]. 上海：上海人民美术出版社，2006.
ROTH L，WYBENGA G L. The Packaging Designers Book of Patterns[M]. Shanghai：Shanghai People's Fine Arts Publishing House，2006.