

纸张材料弹性模量与剪切模量的关系

谢一环

(浙江东方职业技术学院, 温州 325011)

摘要: 研究了正交各向异性的纸张的各个材料参数之间的关系, 以减少描述纸张材料性能所需的独立参数, 并在纸制结构分析中, 合理匹配了材料参数。通过对材料单元在纯剪切载荷作用时与纯主应力载荷作用时的两种变形进行力学比较分析, 获得了纸张的弹性模量、剪切模量和泊松系数之间的关系, 并导出了简单数学公式。该公式在纸制结构设计、振动分析以及有限元计算等方面有实用的意义。

关键词: 纸张; 正交各向异性; 材料参数; 剪切模量

中图分类号: TB484.1; TB487 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2012)21-0037-04

Relationship between Elastic Modulus and Shear Modulus of Paper

XIE Yi-huan

(Zhejiang Dongfang Vocational College, Wenzhou 325011, China)

Abstract: The relationship among material parameters of orthotropic paper was studied to reduce the independent parameters of paper performance for reasonable parameter matching in paper structure. The deformations of material unit in pure shear loading and pure normal stress loading were compared. The relationship among elastic modulus, shear modulus and Poisson's ratio was obtained and a simple mathematic equation of the relationship was deduced. The purpose was to provide reference structure design, deformation calculation, vibration analysis and FEM simulation of orthotropic paper.

Key words: paper; orthotropic; material constant; shear modulus

长期以来, 纸张的功能是作为书写文字和承印图文的载体, 不作为承载的材料。自 1871 年 A. Jones 发明单面瓦楞纸板以后, 由纸张集成的结构迅速发展为包装工业的重要材料。目前除了用 5 层和 7 层瓦楞纸板做纸箱和用蜂窝纸板^[1-2]做减震缓冲结构外, 还有用特种瓦楞纸做成板材结构^[2], 用于机器等重物的运输包装箱或制作简单家具, 其承载能力可以达到 1 t/m^2 。由于结构应用范围的拓广, 在纸制结构的力学有限元分析和实验方面出现了许多研究工作。

纸张作为纸制结构的最小组成单元, 其力学性能直接影响到纸制结构的强度、稳定性和减振特性。不同于金属, 描述纸张力学特性的材料参数较多, 而且参数之间存在着一定的约束关系。利用这些关系正确选择材料参数, 是获得良好的纸制结构力学分析结果的关键。

1 国内外对纸张结构研究的现状

国内的研究主要是集中在纸张集成结构的整体力学性能方面, 其方法是实验和计算结果互相对比。大致工作分为 2 类: 第 1 类研究纸张集成结构的强度, 刘晔等人^[3]用曲线拟合的方法, 研究了瓦楞纸板静态平压性能, 而滑广军^[4]则是利用线弹性壳体有限元方法分析瓦楞纸板的强度; 第 2 类是研究纸张集成结构的振动性能, 例如张雨等人^[5]将纸张结构看成均匀的各向同性板, 研究了蜂窝纸板缓冲包装系统参数辨识问题, 刘义翔等人^[6]利用 ADAMS 软件研究了瓦楞纸板减振的动力学问题。

国外研究在结构和振动方面的工作与中国类似, 所不同的是外国学者较为重视基础领域的深入探索,

收稿日期: 2012-08-06

基金项目: 浙江省教育厅新世纪教改项目(yb0123)

作者简介: 谢一环(1955-), 男, 浙江温州人, 博士, 浙江东方职业技术学院高级工程师, 主要研究方向为结构力学、材料科学。

早在 1968 年 Jones^[7] 对纸张平面内的弹性模量进行了实验探讨, Brech 等人^[8] 在 1971 年对纸张作了流变学的研究, Mann 等人^[9] 在 1979 年研究了弹性波在纸张的传播, 利用波的传播速度来测量纸张的弹性模量。

2 纸张可以近似作为正交各向异性材料处理

国内外的许多纸制结构有限元分析的研究工作, 作为基本出发点, 都隐含地假定了纸张是正交各向异性材料^[4,10], 甚至干脆认为是各向同性材料^[11]。而从根本上研究纸张能否作为正交各向异性材料对待的工作很少。

2006 年波兰学者 M. Szewczyk^[12] 在此领域作了深入的研究, 其突破性成就为: 从正交各向异性材料假定出发, 对纸张平面内的弹性模量进行坐标变换, 并用实测数据与理论计算对照, 所得到结果的误差率小于 1%, 从而验证了该平面上纸张正交各向异性材料假设的可行性。

3 纸张弹性模量与剪切模量之间关系的建立

对于各向同性材料, 则弹性模量 E 与剪切模量 G 以及泊松系数 ν 存在如下简单的关系:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1)$$

对于正交各向异性的纸张材料而言, 还没有类似的公式。

式(1)的意义在于, 虽然在材料的应力-应变关系里, 剪应变与主应力之间没有显式耦合, 但由于剪切模量和弹性模量之间存在耦合关系, 从而使得各向同性材料只有 2 个是独立的材料参数。

当纸张作为正交各向异性材料处理时, 纸张各个材料参数之间并不完全独立, 它们要服从材料力学的一些规则^[13]。同样可以猜测, 对正交各向异性材料而言, 可能存在类似于式(1)的关系, 其具体形式会稍许有些变化。

本文的目的旨在建立纸张的弹性模量与剪切模量之间类似于式(1)的关系。就正交各向异性纸张而言, 虽然能写出来的材料参数有 $E_x, E_y, E_z, \nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{zx}, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$ 共 9 个, 其实它们并不各自独立, 还有 3 个类似于式(1)的关系式, 所以真正独立的参数有 6 个。

为了不失一般性, 在推导材料的弹性模量与剪切模量之间关系时采用主方向 1 和主方向 2 作为下指标体系。

图 1a 为正方形材料单元, 当单元所加的 2 个主应力大小相等方向相反时, 即 $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$, 根据应用静力学平衡原理, 则该单元的内接正方形上出现纯剪状态, 见图 1b, 且 $\tau = \sigma$ 。

在 σ 作用下, 图 1a 的正方形单元会变成图 2 的形状, 而嵌入在里面的内接正方形会变成菱形, 夹角会从 $\alpha_0 = \pi/2$ 变为 α , 剪切变形角度 γ 为 $\alpha_0 - \alpha$ 。找出剪切变形角度 γ 与纯伸长变形 $\Delta D_1, \Delta D_2$ 的关系, 就可以导出 E_1, E_2, ν_{12} 和 G_{12} 的互相约束关系。

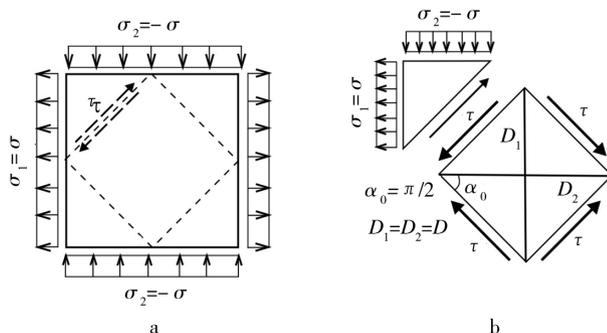


图 1 正方形单元里的剪应力、正应力关系

Fig. 1 Shear stress, normal stress in a square element

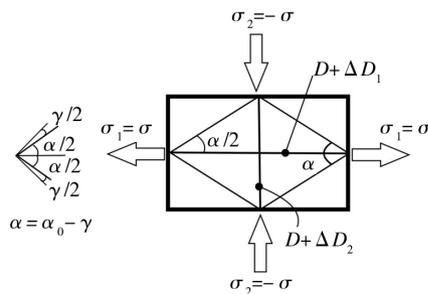


图 2 因拉压变形引起的剪切变形

Fig. 2 Shear deformation caused by stretching and compressing

变形后的菱形角度 $\alpha/2$ 的正切为:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{(D+\Delta D_2)/2}{(D+\Delta D_1)/2} = \frac{1+\Delta D_2/D}{1+\Delta D_1/D} = \frac{1+\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1} \quad (2)$$

其中: $\varepsilon_1 = \Delta D_1/D$, 为材料在应力主方向 1 上的应变, 同理 ε_2 为应力主方向 2 上的应变。

$$\text{利用: } \tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\alpha_0 - \gamma}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right)$$

式(2)可转化为:

$$\tan\left(\frac{\pi-\gamma}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{1+\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1} \quad (3)$$

将(3)式的两边的应变变量 γ, ε_1 和 ε_2 展开到一阶,即:

$$\tan\left(\frac{\pi-\gamma}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)-\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}+O(\gamma)=1-\varepsilon_1+\varepsilon_2+O(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

忽略高阶微量,即有如下简单的应变关系:

$$\gamma=\varepsilon_1-\varepsilon_2 \quad (4)$$

将应变写成应力形式:

$$\frac{\tau}{G_{12}}=\left(\frac{\sigma_1}{E_1}-v_{21}\frac{\sigma_2}{E_2}\right)-\left(\frac{\sigma_2}{E_2}-v_{12}\frac{\sigma_1}{E_1}\right) \quad (5)$$

其中: $\tau=\sigma, \sigma_1=\sigma, \sigma_2=-\sigma$ 。

通过对式(5)化简整理可以得到材料参数的对称表达方式:

$$G_{12}=\frac{E_1E_2}{E_1(1+v_{21})+E_2(1+v_{12})} \quad (6)$$

式(6)中的变量依然不独立,它们之间存在正交各向异性材料的关系^[13]:

$$v_{21}=\frac{v_12E_2}{E_1} \quad (7)$$

消去 v_{21} 可以得到最终的剪切模量的表达式:

$$G_{12}=\frac{E_1E_2}{E_1+E_2(1+2v_{12})} \quad (8)$$

将 G_{12} 的下标 1 和 2 各自分别换成 x, y 和 z , 并考虑到对称性 $G_{ij}=G_{ji}$, 且 $i \neq j$, 则公式(8)代表在空间一共有 3 个剪切模量 G_{xy}, G_{yz} 和 G_{zx} , 其表达形式为:

$$G_{xy}=\frac{E_xE_y}{E_x+E_y(1+2v_{xy})} \quad (9)$$

$$G_{yz}=\frac{E_yE_z}{E_y+E_z(1+2v_{yz})} \quad (10)$$

$$G_{zx}=\frac{E_zE_x}{E_z+E_x(1+2v_{zx})} \quad (11)$$

4 纸张弹性模量与剪切模量之间关系的应用

作为式(9)~(11)的应用,对文献[4]和[10]中采用纸张测量参数进行误差分析,以判断材料参数的输入质量。其方法是将文献里的弹性模量和泊松比数据代入式(9)~(11),计算出相应的剪切模量,并与文献中给出的剪切模量比较,结果见表 1。

表 1 中的纸张在其平面 xOy 内,剪切模量 G_{xy} 符合式(9),而且误差不到 1%,完全在工程可接受误差

表 1 剪切模量的计算值与文献[4]和[10]仿真数据的比较

Tab.1 Comparison of the calculated modulus to the result of simulation^[4,10]

文献[4] 仿真数据	纸板厚度 /mm	弹性模量/MPa			泊松比			剪切模量/MPa		
		E_x	E_y	E_z	v_{xy}	v_{yz}	v_{zx}	G_{xy}	G_{yz}	G_{zx}
	0.269	7600	4020	38	0.34	0.01	0.01	2140	20	70
式(9)-(11)	0.269	7600	4020	38	0.34	0.01	0.01	2128.5	37.6	37.1
相对误差%		与文献数据相同						-0.54	46.8	-88.8
文献[10] 仿真数据	纸板厚度 /mm	弹性模量/MPa			泊松比			剪切模量/MPa		
		E_x	E_y	E_z	v_{xy}	v_{yz}	v_{zx}	G_{xy}	G_{yz}	G_{zx}
	0.269	6660	3310	33	0.34	0.01	0.01	1820	121	95
式(9)-(11)	0.269	6660	3310	33	0.34	0.01	0.01	1804	32.7	32.2
相对误差%		与文献数据相同						-0.89	-270	-195

内;但是在 yOz 和 zOx 平面内,相应剪切模量 G_{yz} 和 G_{zx} 的误差非常大,从 50% 到几倍,其原因可能是弹性模量和泊松比在不同方向的差别过大,引起大的测量误差,使得结果不符合式(8)的计数值,还有一个可能是文献中选择的纸张不是正交各向异性材料,而是一般各向异性材料。

市场上的商业有限元结构分析的软件,一般是为正交各向异性材料而设计的,材料参数的关系会影响计算的输出结果。用式(9)~(11)事先校核输入参

数,对提高结构的数值计算精度大有益处。如果某种纸张材料不属于正交各向异性材料,则需要考虑选择相应合适的分析方法来处理。

5 结论

在纸平面上,纸张可以看成正交各向异性的材料,已经成为业内从事结构设计和分析人士的共识。纸张材料参数之间存在上文推导的耦合关系,它可以

用来校核作有限元分析中输入的材料参数的正确性,对提高结构分析和振动分析的精度有实用意义。

参考文献:

- [1] 王冬梅,王志伟. 纸质结构型包装材料缓冲性能研究进展[J]. 材料导报,2007,21(6):43-46.
WANG Dong-mei, WANG Zhi-wei. Research Advance in Paper Structure Cushioning Packaging Materials[J]. Material Reviews,2007,21(6):43-46.
- [2] 中申板业有限公司. 超强瓦楞蜂窝复合板:中国,专利 ZL200420024229[P]. 2004-01-11.
Zhongshen Plank Industry Ltd. A Super Strong Corrugated Paperboard with Beehive Structure: Chines Patent, ZL200420024229[P]. 2004-01-11.
- [3] 刘晔,王振林,高德. 三重组合瓦楞纸板静态平压性能的理论建模[J]. 包装工程,2004,25(5):162-164.
LIU Ye, WANG Zhen-lin, GAO De. Modeling of Static Plain Compression Performance of Tripple Wall Corrugated Fiber Board[J]. Packaging Engineering,2004,25(5):.
- [4] 滑广军,罗定提. 基于屈服准则的瓦楞纸箱强度仿真分析[J]. 包装学报,2010,2(1):18-21.
HUA Guang-jun, LUO Ding-ti. The Simulation Analysis of Corrugated Board Strength Based on Buckling Criteria[J]. Packaging Journal,2010,2(1):18-21.
- [5] 张丽,王保升. 基于 MATLAB 的蜂窝纸板缓冲包装系统参数辨识[J]. 包装工程,2011,32(23):137-140.
ZHANG Li, WANG Bao-sheng. Parameter Identification of Honeycomb Paperboard Cushion Packaging System Based on MATLAB[J]. Packaging Engineering,2011,32(23):137-140.
- [6] 刘义翔,高德,刘晔. 基于 ADAMS 软件瓦楞纸板缓冲性能的动力学仿真研究[J]. 包装工程,2002,23(4):127-135.
LIU Yi-xiang, GAO De, LIU Ye. Research of Dynamic Simulation of Buffering Characteristics Corrugated Cardboard with ADMS Software[J]. Packaging Engineering,2002,23(4):127-135.
- [7] JONES A R. Experimental Investigation of the In-plane Elastic Module of Paper[J]. Tappi,1968,51(5):203-209.
- [8] BRECHT W, GÖTTSCHING L, BAUMGARTEN H L. Beitrage zur Rheologie des Papiers[J]. Das Papier,1971,25(10):569-582.
- [9] MANN R W, BAUM G A, HABEGER C C. Elastic Wave Propagation in Paper[J]. Tappi,1979,62(8):115-118.
- [10] 舒童,王坤,王钊,等. 全瓦楞纸板缓冲包装衬垫的仿真实验[J]. 包装工程,2008,29(6):33-34.
SHU Tong, WANG Kun, WANG Zhao, et al. Simulation Test of All Corrugated Paperboard Cushion Packaging[J]. Packaging Engineering,2008,29(6):33-34.
- [11] 王冬梅,廖华强. 蜂窝纸板静态压缩力学性能建模研究[J]. 包装工程,2006,27(4):129-132.
WANG Dong-mei, HAO Qiang-hua. Research on the Mechanical Performance Modeling of Honeycomb Paperboard under Quasi-static Compression[J]. Packaging Engineering,2006,27(4):129-132.
- [12] SZEWEZYK M, MARYNOWSKI K, TARNAWSKI W. An Analysis of Young's Modulus Distribution in the Paper Plane[J]. FIBRES & TEXTILES in Eastern Europe,2006,58(4):91-94.
- [13] 张少实,庄茁. 复合材料与粘弹性力学[M]. 北京:机械工业出版社,2011.
ZHANG Shao-shi, ZHUANG Zhuo. Composite Materials and Viscoelastic Mechanics[M]. Beijing:China Machine Press,2011.
- [11] 周慧云,陈西广,刘成圣,等. 壳聚糖在药物缓释中的研究进展[J]. 海洋科学,2006,30(3):85-89.
ZHOU Hui-yun, CHEN Xi-guang, LIU Cheng-sheng, et al. Progress of Chitosan on Sustained Drug Delivery[J]. Marine Sciences,2006,30(3):85-89.
- [12] BERTHOLD A, CREMER K, KREUTER J. Preparation and Characterization of Chitosan Microspheres as Drug Carrier for Prednisolone Sodium Phosphate as Model for Anti-inflammatory Drugs[J]. Journal of Controlled Release,1996,39(1):17-25.
- [13] TWU Yawo-kuo, CHEN Yu-wan, SHIH Chao-ming. Preparation of Silver Nanoparticles Using Chitosan Suspensions[J]. Powder Technology,2008,185:251-257.
- [14] WANG Lian-yan, MA Guang-hui, SU Zhi-guo. Preparation of Uniform Sized Chitosan Microspheres by Membrane Emulsification Technique and Application as a Carrier of Protein Drug[J]. Journal of Controlled Release,2005,106:62-75.
- [15] 赵原璧. 靶向药物载体——壳聚糖磁性微球的制备和性能研究[D]. 南昌:南昌大学,2007.
ZHAO Yuan-bi. Preparation and Characterization of Magnetic Chitosan Microspheres Used for Targeted-drug Carrier[D]. Nanchang:Nanchang University,2007.

(上接第 19 页)