包装工程 PACKAGING ENGINEERING Vol. 34 No. 23 2013-12

缓冲包装设计方法数学内涵探析

滑广军，赵德坚，肖颖喆，谢 勇
(湖南工业大学，株洲 412008)

摘要：为便于设计者理解和掌握缓冲系数-最大应力曲线的缓冲设计方法，利用数学方法进行了研究。将材料缓冲系数-最大应力曲线等效为通用函数方程的形式，并与缓冲面积及厚度计算公式一起作为不定式方程组进行分析，从而将基于缓冲系数-最大应力的缓冲设计方法转化为求解不定式方程组的问题。对几种经典的缓冲包装衬垫面积和厚度计算方法进行了分类和诠释。这些典型的缓冲结构面积及厚度设计方法本质上是为求解不定式方程组增加了不同的约束条件，将求解不定式方程组转变为求解适定方程组的问题，有助于设计人员灵活地设计缓冲包装结构。

关键词：缓冲系数；缓冲设计；不定式方程组

中图分类号：TB485.1　**文献标识码**：A　**文章编号**：1001-3563(2013)23-0064-04

Discussion and Analysis on Mathematical Connotation of Cushioning Packaging Design Method

HUA Guang-jun, ZHAO De-jian, XIAO Ying-zhe, XIE Yong
(Hunan University of Technology, Zhuzhou 412008, China)

Abstract: The purpose was to help designers understand the cushioning design methods based on cushioning coefficient-maximum stress curve. The cushioning coefficient-maximum stress curve was equivalent to an infinitive equation. The infinitive equation was composed to infinitive equation group together with the cushioning pad area and thickness formula. By this means, the cushioning pad design methods based on cushioning coefficient-maximum stress curve was converted to the problem of solving infinitive equation group. By this method, the classic cushioning pad area and thickness calculation methods were analyzed and classified. It was concluded that the essence of the classic cushioning design methods is adding a restriction to the infinitive equation group and converting the original infinitive equation group to posed equations.

Key words: cushioning coefficient; cushioning packaging design; infinitive equation group

缓冲包装目的是在流通过程中吸收冲击能量并起到隔振的作用，避免内装物由于冲击振动而损坏。国内外学者和研究机构分别采用不同的研究方法和手段对典型缓冲材料性能及缓冲包装的设计方法进行分析研究[1-10]。最简单的缓冲设计方法是基于材料缓冲系数-最大应力曲线进行缓冲结构的设计。以材料缓冲系数-最大应力曲线为基础，演绎出多种缓冲结构设计方法[11-15]。为使包装设计人员深入理解这些设计方法的本质关系和区别，并能灵活运用，笔者基于数学的思想对这些缓冲结构计算方法进行了分析。

1 基于 C-σ_m 的缓冲结构设计方法

缓冲包装结构设计应综合考虑流通环境的振动冲击，以及包装产品特性、缓冲材料特性等因素。基于缓冲系数的缓冲结构设计方法利用 C-σ_m(缓冲系数-最大应力)表征材料的缓冲性能，并以产品的质量

收稿日期：2013-10-16
基金项目：湖南省教育厅教改基金资助项目(10C258)；湖南工业大学教改项目(2013A10)
作者简介：滑广军(1975-)，男，河南长垣人，工学博士，湖南工业大学副教授，主要研究方向为运输包装技术、振动测试与故障诊断、结构动力学、CAD\CAE。

m、易损性 G 及跌落高度 H 为已知条件，进行缓冲衬垫面积和厚度的计算[16]。缓冲垫面积及厚度的计算公式分别见式(1)和式(2)，某材料的 C-σ_m 见图 1。

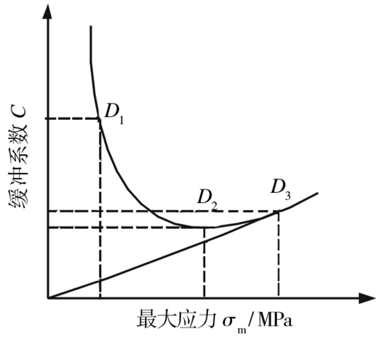

图 1　曲线 C-σ_m

Fig. 1 C-σ_m curves

$$A=\frac{Gm}{\sigma_m} \tag{1}$$

$$h=\frac{CH}{G} \tag{2}$$

式(1)、式(2)中：G 为产品冲击最大加速度，常用产品许用脆值[G]来代替([G]为重力加速度倍数，是无量纲量)；m 为产品质量；H 为包装件在流通过程中的跌落高度；A 为缓冲垫面积；h 为缓冲垫厚度。

2　缓冲设计欠定方程组的建立

2.1　C-σ_m 曲线的等效方程表示

曲线的方程是几何曲线的一种代数表示，方程的曲线则是曲线的方程的一种几何表示。曲线和方程的这种相互表示，揭示了几何中的“形”与代数中的“数”的统一结合。一条曲线与一个方程之间具有互为表示的关系。材料的 C-σ_m 曲线往往呈现高度的非线性，用解析式不易精确表达，因此考虑用通用函数方程形式表述为：

$$C=f(\sigma_m) \tag{3}$$

2.2　计算缓冲垫面积及厚度的欠定方程组

将图 1 所确定的 C-σ_m 关系用式(3)代替，将式(3)与式(1)和式(2)联立组成方程组。该方程组中，参数 G,m,H 通常在缓冲设计前一般已经获得，因此方程组中有 4 个不确定的参数：h,A,C,σ_m，未知参数的个数大于方程的个数。利用上述方程组计算缓冲垫的厚度和面积在数学上属于求解不定式方程组(又称欠定方程组)的问题。欠定方程组往往有无穷解，使上述 3 式成立的 h,A,C,σ_m 往往不是唯一的。如果要使上述不定式方程组具有唯一解，必须再加入一个限制条件。

3　基于不同约束条件的缓冲设计方法

从以上分析可知，对于某一种缓冲材料，其满足产品缓冲要求的缓冲方案可以有无穷个，由此缓冲面积及厚度组合方案的确定，需要从产品结构特点、经济性、流通条件或其他条件中再选择一个约束条件。根据不同约束条件，基于缓冲系数-最大应力的典型缓冲包装结构设计方法可以分为以下几种。

3.1　最小缓冲系数法

缓冲材料的缓冲系数定义为缓冲效率的倒数，一般其表达式为：

$$C=\frac{\sigma_m}{e} \tag{4}$$

式中：e 为达到最大应力 σ_m 时缓冲材料的单位体积变形能，即 $e=\int_0^{\varepsilon_m}\sigma \mathrm{d}\varepsilon$ 。

缓冲系数最小点对应材料的缓冲效率最高点，由公式(2)可知，当缓冲系数最小时，缓冲衬垫最薄，可以使包装容器的尺寸最小。

最小缓冲系数法的设计步骤为：从 C-σ_m 曲线找到最小缓冲系数点 D_2(参见图 1)；将数据分别代入式(1)和(2)计算缓冲面积和厚度。最小缓冲系数法实质是增加了一个缓冲系数最小的限制条件。

3.2　最省材料的缓冲结构设计

为了降低包装成本，进行缓冲包装设计时要考虑尽量减少包装材料的用量。张良华和刘乘在文献[16]中提出了最省材料的缓冲设计选取方法，并从数学上进行了理论推导。该方法认为，从坐标原点作 C-σ_m 曲线的切线，则切点 D_3 就是最省材料点，见图 1。文献[17]以实例分别进行了基于最小缓冲系数点和最省材料点的缓冲面积和厚度计算，对该方法进行了验证。

该方法的本质是对缓冲设计增加一个最省材料的限制条件，将优化设计思想引入到缓冲结构设计中。

3.3　指定缓冲垫面积的缓冲设计方法

指定缓冲垫面积的缓冲包装设计方法有全面缓冲设计和局部缓冲设计方法[18]。对于直接指定面积

的缓冲设计，由于面积已知，因此 A 作为已知条件，公式(1)-(3)中只有3个未知量，利用3个方程可以获得确定的解。指定缓冲垫面积的缓冲设计方法步骤为：首先将面积值代入式(1)，求出对应的最大应力 σ_m，从 C-σ_m 曲线中找到对应的 C 值并带入式(2)，则可求出缓冲垫的厚度。指定面积的缓冲设计方法相当于对不定式方程组增加了一个已知面积的限制条件。

4 约束条件的选择思路

通过对以上典型缓冲设计方法的研究表明，这些基于材料缓冲系数-最大应力曲线的缓冲设计方法的本质上是寻找一个约束条件，从而将欠定方程组转变为适定方程组。一个实用的包装要综合考虑多种因素，不同产品的强度、形状、质量差别较大，包装件的流通条件往往不同，还要考虑包装的经济性等。这些因素都可以作为限制条件，从而将不定式方程组转变为适定方程组。不同的限制条件可以获得不同的面积和厚度组合方案，包装设计工程师可以根据实际需要灵活设计。

虽然缓冲设计允许缓冲衬垫的面积大于产品的面积，这往往是不得已的选择。一般来说，全面缓冲方式是消耗缓冲材料最多的设计方案，而最省材料的缓冲设计往往是最经济的设计方案。这2种设计方法的计算结果大致决定了进行缓冲设计时缓冲系数、最大应力、面积和厚度的选择范围。在图1中，如果全面缓冲方案使用的对应的数据点为 D_1，最省材料的缓冲设计方案使用的数据点为 D_3，那么从满足缓冲需要的角度，C-σ_m 曲线段在 D_1 与 D_3 之间的数据都可以用于设计缓冲垫的面积和厚度。

5 结语

1）基于数学思想将 C-σ_m 曲线等效为通用函数方程，并将该方程与缓冲面积及厚度计算公式组成欠定方程组。研究表明，传统的基于 C-σ_m 曲线及产品脆值、产品质量、跌落高度等计算缓冲衬垫的面积和厚度的缓冲设计方法，在3个约束方程中有4个未定参数，在数学上属于求解欠定方程组的问题。

2）指定面积的缓冲设计、最省材料缓冲设计及最小缓冲系数设计法本质上是向不定式方程组增加了一个约束条件，从而使欠定方程组转化为适定方程组。

3）从缓冲防护安全性的角度，缓冲材料满足要求的解往往是无穷多的，因此可以有无穷多个缓冲方案。缓冲方案的不确定性，以及产品的多样性、结构的复杂性、包装的经济性等方面的因素，使得约束条件的选择与缓冲方案的选择具有很大的灵活性。

参考文献：

[1] WANG Zhi-wei, E Yu-ping. Mathematical Modelling of Energy Absorption Property for Paper Honeycomb in Various Ambient Humidities[J]. Materials and Design, 2010(31): 4321-4328.

[2] MICHAEL A S, MERV M, VINCENT R, et al. A New Method for the Determination of Cushion Curves[J]. Packaging Technology and Science, 2000, 13(6): 249-255.

[3] 卢富德，高德. 考虑蜂窝纸板箱缓冲作用的产品包装系统跌落冲击研究[J]. 振动工程学报，2012，25(3)：335-341.
LU Fu-de, GAO De. Study on Drop Impact of Packaging System Considering the Cushioning Action of Honeycomb Paperboard Box[J]. Journal of Vibration Engineering, 2012, 25(3): 335-341.

[4] 卢富德，陶伟明，高德. 瓦楞纸板串联缓冲系统动力学响应[J]. 振动与冲击，2012，31(21)：31-34.
LU Fu-de, TAO Wei-ming, GAO De. Dynamic Response of a Series Cushioning Packaging System Made of Multi-layer Corrugated Paperboard[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(21): 31-34.

[5] 卢富德，陶伟明，高德. 串联缓冲系统冲击响应与结构优化分析[J]. 浙江大学学报（工学版），2012，46(10)：1773-1777，1789
LU Fu-de, TAO Wei-ming, GAO De. Impact Response of Series Cushioning System and Structure Optimization Analysis[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 46(10): 1773-1777, 1789.

[6] 王长智，陈文革. 基于ANSYS软件的产品跌落分析与耐跌结构设计[J]. 包装工程，2013，34(1)：44-46.
WANG Chang-zhi, CHEN Wen-ge. Drop Simulation Analysis and Structure Design of Product Based on ANSYS[J]. Packaging Engineering, 2013, 34(1): 44-46.

[7] 邱莎莎，蔡建，张恒翔. 导弹缓冲包装设计与选材[J]. 包装工程，2011，32(9)：44-47.
QIU Sha-sha, CAI Jian, ZHANG Heng-xiang. Missile Cushion Packaging Design and Material Selection[J]. Packaging

Engineering,2011,32(9):44-47.

[8] 宋宝丰,袁志庆.缓冲包装设计中构建破损边界曲线的新途径[J].包装学报,2013,5(3):46-50.
SONG Bao-feng,YUAN Zhi-qing. A New Way of Constructing Damage Boundary Curvein Cushioning Packaging Design[J]. Packaging Journal,2013,5(3):46-50.

[9] WILLIAM I K. Development in Testing Products for Distribution[J]. Packaging Technology and Science,2000,13(3):89-98.

[10] UMUD E O,GUNAY A. Finite Element Analysis of Expanded Polystyrene Foam under Multiple Compressive Loading and Unloading[J]. Materials and Design,2011,32(2):773-780.

[11] GB/T 8166—1987,缓冲包装设计方法[S].
GB/T 8166—1987,Package Cushioning Design Method[S].

[12] 赵荣丽,李克天,何卫,等.变压器运输包装缓冲衬垫设计[J].包装工程,2010,31(21):19-22.
ZHAO Rong-li,LI Ke-tian,HE Wei,et al. Design of Bumper Pad for Transport Package of Transformer[J]. Packaging Engineering,2010,31(21):19-22.

[13] 梅林玉.缓冲包装结构设计浅析[J].中国包装,2007(6):7-9.
MEI Lin-yu. Analysis of Package Cushioning Structure Design[J]. China Packaging,2007(6):7-9.

[14] 李连进.产品隔振缓冲包装结构的设计方法[C]//中国农业机械学会2006年学术年会论文:1459-1461.
LI Lian-jin. Method of Design of Product Packing Structure of Vibration Isolation and Buffering[C]//China Agricultural Machinery Association 2006 Annual Conference Paper:1459-1461.

[15] 向红.包装设计工程基础[M].长沙:国防科技大学出版社,2002:99-102.
XIANG Hong. Fundamentals of Packaging Design Engineering[M]. Changsha:National Defence Industry Press,2002:99-102.

[16] 张华良,刘乘.包装材料缓冲特性曲线研究及其在缓冲设计中的应用[J].西北轻工业学院学报,1990,8(3):45-48.
ZHANG Hua-liang,LIU Cheng. Study on Cushion Curves and Its Using in Cushion Design[J]. Journal of Northwest Institute on Light Industry,1990,8(3):45-48.

[17] 彭国勋.物流运输包装设计[M].北京:印刷工业出版社,2012:106-112,136-137.
PENG Guo-xun. Logistics and Transport Packaging Design[M]. Beijing:Printing Industry Press,2012:106-112,136-137.

[18] 高德,计宏伟.包装动力学[M].北京:轻工业出版社,2010:156-172.
GAO De,JI Hong-wei. Packaging Dynamics[M]. Beijing:Light Industry Press,2010:156-172.

(上接第63页)

CHEN Shu-rong. The Research Progress of Cushioning Performance Characterization Methods for Foaming Materials[J]. Printing Quality & Standardization,2013(1):25-27.

[9] GIBSON L J,ASHBY M F,KUMAR K S. Cellular Solids:Structure and Properties,2ded[J]. MRS Bulletin-Materials Research Society,1998,23(7):69.

[10] 王冬梅.蜂窝纸板压缩破坏机理研究[J].包装工程,2006,27(1):37-39.
WANG Dong-mei. The Research on Compression Damage Mechanism of Honeycomb Paperboard[J]. Packaging Engineering,2006,27(1):37-39.

[11] 李晓丽.蜂窝纸板静态压缩力学性能仿真研究[D].合肥:安徽理工大学,2011.
LI Xiao-li. Simulation Research of Static Compressive Mechanical Properties of Honeycomb Paperboard[D]. Hefei:Anhui University of Science and Technology,2011.

[12] 温时宝.层合瓦楞纸板结构沿瓦楞方向的准静态压缩性能研究[J].包装工程,2011,32(9):30-32.
WEN Shi-bao. Quasi-static Compressive Properties of Laminated Structure of Corrugated Paper-board along Corrugated Direction[J]. Packaging Engineering,2011,32(9):30-32.

[13] MINDLIN R D. Dynamics of Package Cushioning[M]. Bell Telephone Laboratories,1945.

[14] 卢富德,高德.考虑蜂窝纸板箱缓冲作用的产品包装系统跌落冲击研究[J].振动工程学报,2012,25(7):336-341.
LU Fu-de,GAO De. Drop Impact Study on Cushioning Packaging System of Honeycomb Paperboard[J]. Journal of Vibration Engineering,2012,25(7):336-341.

[15] 卢富德,高德.C楞瓦楞纸板动态缓冲模型及应用[J].功能材料,2012(1):39-41.
LU Fu-de,GAO De. Dynamic Cushioning Model and Application of C Corrugated Paperboard[J]. Functional Materials,2012(1):39-41.

[16] 李正伟,李无穷.B楞瓦楞纸板本构模型及其应用[J].包装工程,2011,32(21):42-44.
LI Zheng-wei,LI Wu-qiong. Constitutive Model and Application of B Corrugated Paperboard[J]. Packaging Engineering,2011,32(21):42-44.