

基于分枝界定的VRP模型精确算法研究及应用

曹平方, 李灵, 李诗珍

(长江大学, 荆州 434020)

摘要: **目的** 克服用启发式算法求解车辆路线问题(VRP)结果精确度不高的缺点。**方法** 建立了一种改进型的单场站、多辆车车辆路径数学模型。通过对车辆路径问题进行分析,将用于旅行商问题(TSP)的分枝界定法加以改进,设计出了一种车辆调度问题的精确算法,并用计算机对算法进行编程。用实例加以验证,对有1个中心仓库和8个需求点的配送系统进行了优化。**结果** 得到含有3条线路、总路长为60 km的方案,相对于启发式算法的求解结果(77 km)缩短了17 km。**结论** 运用分支界定法求解VRP的结果更加精确,也容易实现。

关键词: VRP模型; 分枝界定法; 路径优化

中图分类号: O224; [U-9] **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2014)17-0097-05

Research and Application of the Accurate Algorithm of VRP Model Based on Branch and Bound Method

CAO Ping-fang, LI Ling, LI Shi-zhen

(Yangtze University, Jingzhou 434020, China)

ABSTRACT: **Objective** To overcome the drawback of low accuracy of heuristic algorithm in solving VRP. **Methods** An improved vehicle routing model was built with single depot and multi vehicles. By analyzing the vehicle path problem, this paper improved the Branch and Bound method used in Travelling Salesman Problem and designed an accurate algorithm for the VRP model. Then, the algorithm was programmed by computer. At last, a case of a distribution system with one central warehouse and eight customers was taken as an example to show the effectiveness of the algorithm. **Results** A solution with 3 lines containing a total road length of 60 km was obtained, which saved 17 km in comparison with the result (77 km) attained using heuristic algorithm. **Conclusion** Using Branch and Bound method to solve vehicle and routing problem was simple to implement, and the solution was more accurate.

KEY WORDS: VRP model; Branch and Bound method; path optimization

车辆路线问题(Vehicle Routing Problem, VRP)最早由Dantzig和Ramser^[1]于1959年首次提出,其一般描述为:设1个场站(depot),共有 M 辆货车,车辆容量为 C ,有 N 位顾客(customer),每位顾客有其需求量 D 。车辆从场站出发对顾客进行配送服务,最后返回场站,要求所有顾客都被配送,每位顾客1次配送完成,

且不能违反车辆容量的限制,所有车辆路线的总距离最小。

1 VRP 算法研究现状

VRP属于强NP问题,约束条件复杂,求解时间

收稿日期: 2014-02-23

基金项目: 国家级大学生创新创业训练计划项目(201210489314)

作者简介: 曹平方(1990—),男,湖北钟祥人,长江大学本科生,主攻配送中心作业规划与设计。

通讯作者: 李诗珍(1967—),女,湖北荆州人,博士,长江大学教授、硕士生导师,主要研究方向为供应链管理、配送中心作业规划与设计。

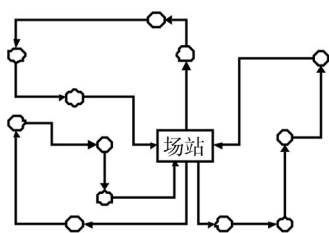


图1 VRP示意

Fig.1 Schematic diagram of VRP

长。VRP示意图见图1。目前VRP的求解方法主要分为：精确算法和启发式算法。但由于VRP求解的难度，研究中常用启发式算法进行求解，以降低求解结果的精确性为代价简化求解过程。启发式算法又分为构造启发式算法、改进启发式算法和亚启发式算法三大类^[2-8]，详细分类见图2。

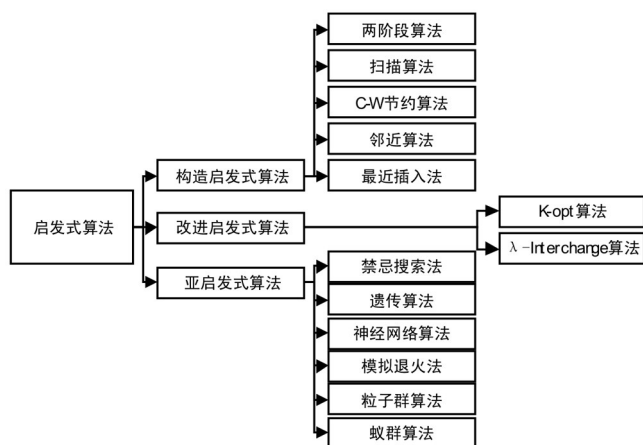


图2 VRP启发式算法分类

Fig.2 Classification of VRP heuristic algorithm

精确算法包括：分枝界定法、割平面法、网络流算法和动态规划法。笔者将用于旅行商问题(Traveling Salesman Problem, TSP)的分枝界定法加以改进，设计了一种用于求解车辆路径问题的精确算法，并用计算机对算法进行了编程，最后用实例加以验证。

2 改进型VRP模型

改进型VRP模型的改进在约束条件和算法上都有体现。在约束条件上，改进型模型为使每条线路只由1辆车完成配送，没有对每辆车(或多条线路)都进行编号，而是引入累计配送量作为新的变量，当累计配送量达到车辆的标准载容量时，1条线路则已形

成。相对于对每辆车(或每条线路)都进行编号，这种做法会使模型的变量总数大大减少，从而提高模型的可解性；在算法上，改进型模型使用分枝界定法，用更精确的算法对各个子回路进行排程，从而提高求解结果的精确性。

2.1 改进型VRP模型建立^[9-12]

模型假设条件有：车辆为同型号的，标准载容量相等；路况对车辆的行驶距离没有影响；单个顾客的需求量不会超过车辆的标准载容量；车辆数不受限制；场站有足够货物满足各个顾客的需求。

建立的模型如下：

$$\min z = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ik} X_{ik} \quad (1)$$

St.

$$X_{kk} = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} = 1; Q_i + U_k \leq C, k=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n X_{kj} = 1; Q_k + U_j \leq C, k=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$Q_k \leq U_k \leq C \quad (5)$$

$$U_k \geq U_i + Q_k - C + C(X_{ki} + X_{ik}) - (Q_k + Q_i)X_{ki}; i \neq k \neq 1 \quad (6)$$

$$U_k \leq C - (C - Q_k)X_{ik}; i=1, k=1, 2, \dots, m \quad (7)$$

$$U_k \geq Q_k + \sum_{i=1}^n Q_i \cdot X_{ik}; k=1, 2, \dots, m \quad (8)$$

$$L = (\sum_{i=1}^n Q_i) / C \quad (9)$$

$$L_0 = (\sum_{j>1}^n X_{1j} \geq [L]); [L] \text{表示不小于} L \text{的最小正数} \quad (10)$$

上述模型中， i, j 或 k 为场站或顾客的编号； d_{ik} 为顾客 i 和 k 之间的运输距离；场站的编号为1； $(n-1)$ 为顾客的数量； Q_i 为顾客 i 的需求量； U_i 为到顾客 i 为止的累计配送量； c 为每辆车的标准载容量； x_{ik} 为0或1变量，有1辆车从顾客 i 驶向顾客 k ，则 x_{ik} 等于1，否则 x_{ik} 等于0。

式(1)为目标函数式，使得总路径最短；式(2)表示节点自身之间不存在路径，例如某顾客的编号为2，车辆不能从2号顾客再行驶到2号顾客；式(3)表示一定有1辆车进入顾客 k 所在的位置，式(4)表示这辆车完成服务后必须离开顾客 k 所在位置，式(3)(4)结合表示每个点能且仅得到1次服务；式(5)表示车辆在某

点处的累计回收量必定不小于在该点的回收量,同时不能超过自身的容量;式(6)可以保证各回收点之间不存在排除场站的子回路;式(7)表示若 k 是线路上的第1个回收点,则 $U_k=Q_k$,式(8)表示若 k 不是线路上的第1个回收点,则 U_k 等于线路上 k 点之前各点的回收总量再加上 k 点的回收量,式(6)(7)(8)加起来就可以保证进出每个节点的是同一辆回收车;式(9)(10)可以求出需要派出的最少车辆数。在拥有的车辆数足够满足需求的前提下,式(9)(10)也可合写为

$$L_0 = \sum_{i>1}^n X_{ij} \leq m, m \text{ 为拥有的车辆数。}$$

2.2 算法原理

分枝界定法本质上是一种穷举法,其基本思想是对有约束条件最优化问题的所有可行解(数目有限)空间进行搜索。该算法在具体执行时,把全部可行解空间不断分割为越来越小的子集(称为分枝),并为每个子集内解的值计算下界或上界(称为定界)。在每次分枝后,对凡是界限超出已知可行解值的子集不再做进一步分枝。这样,解的许多子集(即搜索树上的许多结点)就可以不予考虑了,从而缩小了搜索范围。这一过程一直进行到找出可行解为止,该可行解的值不大于任何子集的界限,因此,这种算法一般可以求得最优解^[13]。

与插入法、节约算法等启发式算法不同,运用分枝界定法对VRP模型进行优化,其总体最优的逻辑是将总体作为一个整体进行优化,而不是将总体先分成若干部分,再对各部分进行优化。也不是先确定各线路最优的节点构成,再确定各线路的最优排程,而是对不同节点构成下各线路的总距离进行优化,再通过比较以确定最优各线路的节点构成。在最优各线路节点构成确定的同时,也确定了各线路节点的最优排程。

2.3 算法步骤

1) 将各节点的需求量 Q_i 从小到大排列,按需求量由小到大取各节点 i ,直到选取节点 k 时的累计需求量 U_k 大于车辆量的标准载容量,则将放弃选取节点 k ,将节点 k 之前的各节点与出发点共同形成1条线路。

2) 在未被选取的节点中继续步骤1),直到出发点以外的所有节点都已被加入某条线路。

3) 对形成的各线路分别进行分支界定,计算线路最短路长。即是对若干个TSP求最短距离。

4) 将各线路的最短路长相加,得到相应节点构成下的最短总路长,定为最优解的上界 S_0 。

5) 在满足标准车载容量限制的前提下,改变各线路的节点构成,用分支界定方法先计算该节点构成下各线路路长的上界,继而求出该节点构成下各线路总路长的上界 Z_{ij} 。

6) 将 Z_{ij} 与 S_0 比较。若 Z_{ij} 大于已得到的 S_0 ,则没有对这种节点构成方案进一步优化的必要,将其舍弃,返回步骤5);若 Z_{ij} 小于已得到的 S_0 ,则对该节点构成下的各线路进一步分支界定,并重新计算各线路最短路长的上界 Z_{ij+1} ,然后令 $Z_{ij}=Z_{ij+1}$,对步骤6)进行自循环,直到使 Z_{ij} 成为该线路节点构成方案下的最短总路长 S_i ,进入下一步。

7) 令 $S_0=S_i$,得到新的最短总路长的上界。

8) 循环执行步骤5)6)7),当穷尽各线路的节点构成方案时,所得到的最短总路长的上界 S_0 即为实际的最短总距离。

2.4 算例

问题的表述:对于有1个中心仓库和8个需求点的配送系统,需求点对中心仓库的需求为 n_i ($i=2, 3, \dots, 9$)(单位为t),中心仓库同时安排多辆车用于本次配送,每辆车的标准载容量皆为8t,要求合理安排车辆的行驶路线,使总运输费用最少,即总运输里程最少。配送网络内任意2个需求点之间的距离和需求关系(距离的单位为km)见表1^[15]。采用lingo11变成

表1 需求点之间距离及需求量

Tab.1 Distances and demands of customers

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	6	16	18	1	18	9	13	1
2	6	0	8	19	8	2	14	14	4
3	16	8	0	16	13	13	6	1	7
4	18	19	16	0	16	9	12	14	11
5	1	8	13	16	0	18	9	15	7
6	18	2	13	9	18	0	6	13	10
7	9	14	6	12	9	6	0	6	3
8	13	14	1	14	15	13	6	0	5
9	1	4	7	11	7	10	3	5	0
di	0	2	3	1	3	3	2	3	1

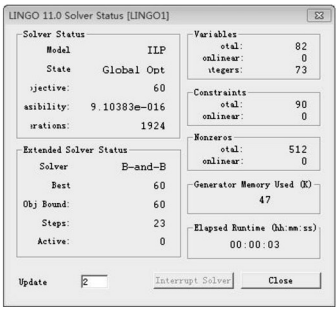


图3 求解状态

Fig.3 Solver Status

表2 配送方法比较

Tab.2 Comparison of distribution methods

比较项目	启发式算法	改进算法
配送线路	1-9-8-3-1	1-5-1
	1-7-5-1	1-8-3-7-1
	1-2-6-4-1	1-9-4-6-2-1
总运输距离/km	77	60

求解,在 win7 32 系统(处理器 intel Core i3-2310@2.1GHz)下运行 3 s 即得到结果。运算终止状态见图 3,其与启发式算法求解结果的比较见表 2。

3 结语

分枝界定法相对于其他算法更为精确,但运算量较大。通过计算机编程进行运算,既保证了求解结果的精确性,又极大地缩短了求解时间。当然,随着约束条件的增加或者数据规模的扩大,分枝界定法的求解时间会成倍增加,但其他算法同样也不能避免这种状况。可见,在相同的约束条件和数据规模下,改进的分枝界定法更具优势。

参考文献:

[1] KUMAR S N, PANNEERSELVAM R P. A Survey on the Vehicle Routing Problem and Its Variants[J]. Intelligent Information Management, 2012, 4(3): 66—74.

[2] 方金城, 张岐山. 物流配送车辆路径问题(VRP)算法综述[J]. 沈阳工程学院学报: 自然科学版, 2006, 2(4): 357—360.

FANG Jin-cheng, ZHANG Qi-shan. Summary of the Algorithm of Logistics Distribution Vehicle Routing Problem (VRP)[J]. Journal of Shenyang Institute of Engineering: Natu-

ral Science, 2006, 2(4): 357—360.

[3] 张红霞, 黄晓霞. 物流企业配送车辆调度问题研究综述[J]. 电脑知识与技术, 2009, 5(13): 3419—3421.

ZHANG Hong-xia, HUANG Xiao-xia. Summary of Logistics Enterprise Distribution Vehicle Scheduling Problems[J]. Computer Knowledge and Technology, 2009, 5(13): 3419—3421.

[4] 贺国先. 基于仿真随机解的模拟退火算法在单物流中心配送 VRP 中的应用[J]. 铁道学报, 2009, 31(4): 92—97.

HE Guo-xian. Application of Annealing Algorithm Based on Random Simulated Solution in Distribution VRP for Single Logistics Center[J]. Journal of the China Railway Society, 2009, 31(4): 92—97.

[5] 刘洁, 刘丹, 何彦锋. 带中转设施的垃圾收集 VRP 的改进蚁群算法[J]. 西南交通大学学报[J]. 2011, 46(2): 333—337.

LIU Jie, LIU Dan, HE Yan-feng. Improved Ant Colony System Algorithm for Waste Collection Vehicle Routing Problem [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2011, 46(2): 333—337.

[6] 杨进, 马良. 蜂群优化算法在车辆路径问题中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(5): 214—216.

YANG Jin, MA Liang. Wasp Colony Algorithm for Vehicle Routing Problem[J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(5): 214—216

[7] 史亚蓉, 万迪昉, 李双燕, 等. 基于 GIS 的物流配送路线规划研究[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(10): 76—83.

SHI Ya-rong, WAN Di-fang, LI Shuang-yan, et al. Research of Vehicle Routing Problem Based on GIS[J]. Systems Engineering-theory & Practice, 2009, 29(10): 76—83.

[8] 石星宏, 张仲荣, 王博, 等. 基于生物寄生行为的双种群粒子群算法在 VRP 中的应用[J]. 兰州交通大学学报, 2012, 31(3): 65—68.

SHI Xin-hong, ZHANG Zhong-rong, WANG Bo, et al. Particle Swarm Optimization Based on Parasitic Behavior for the VRP in the Application[J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2012, 31(3): 65—68.

[9] TUETUENCUE G Y, CARRETO C A C, BAKER B M. A Visual Interactive Approach to Classical and Mixed Vehicle Routing Problems with Backhauls[J]. Omega, 2009, 37(1): 138—154.

[10] 吕品. 基于改进 VRP 模型的危险品配送路径优化及其求解研究[J]. 中国安全生产科学技术, 2011, 7(11): 87—91.

LYU Pin. Research on Route Optimization and Algorithm of Hazardous Materials Distribution Based on Improved VRP model[J]. Journal of Safety Science and Technology, 2011, 7

(11):87—91.

- [11] 王绍仁,任飞宇. 基于公私应急物流资源整合下的VRP研究[J]. 商业研究,2013(5):66—71.

WANG Shao-ren, REN Fei-yu. Research on the VRP Based on Public and Private Emergency Logistics Resource Integration[J]. Commercial Research, 2013(5):66—71.

- [12] OPPEN J. Solving a Rich Vehicle Routing and Inventory Problem Using Column Generation[J]. Computers & Operations Research, 2010,37(7):237—242.

- [13] HORST R, PARDALOS P M, THOAI N V. 全局优化引论[M]. 黄红选,译. 北京:清华大学出版社,2003:179—180.

HORST R, PARDALOS P M, THOAI N V. An Introduction of Overall Optimization[M]. HUANG Hong-xuan, translated.

Beijing: Tsinghua University Press, 2003:179—180.

- [14] MBA L. 分枝界限法[EB/OL]. <http://wiki.mbalib.com/wiki/分枝定界法>.

MBA L. Branch and Bound Method[EB/OL]. <http://wiki.mbalib.com/wiki/分枝定界法>.

- [15] 胡祥培,李永先,郭建文. 基于矩阵变换的车辆路径问题仿真优化方法[J]. 管理科学学报,2008,11(4):67—73.

HU Xiang-pei, LI Yong-xian, GUO Jian-wen. Simulation and Optimization of Vehicle Routing Problem Based on Matrix Variation[J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(4):67—73.

(上接第64页)

- [6] 孙晓,周文欣,张卫红,等. 复合薄膜用耐蒸煮聚氨酯胶粘剂的研究[J]. 河南科技,2005,23(1):35—37.

SUN Xiao, ZHOU Wen-xin, ZHANG Wei-hong. Study of Boiling-resistant Polyurethane Adhesive for Laminating Film[J]. Henan Science, 2005, 23(1):35—37.

- [7] WANG Qing, CHEN Guang-xue, CHEN Shuang-lian, et al. Research on Synthesis and Performance of Solvent-free Aluminum-plastic Composite Polyurethane Adhesive[J]. Advanced Materials Research, 2012, 583:9—13.

- [8] CHEN Shuang-lian, CHEN Guang-xue, CHEN Qi-feng, et al. Preparation of Solvent-free Polyurethane Laminating Adhesive with Mixed-polyols[J]. Advanced Materials Research, 2012, 549:177—182.

- [9] YAN Jin, CHEN Guang-xue, TANG Bao-ling, et al. Adhesion Mechanism and Modification Methods of Solvent-free PU Adhesive[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011, 2703:71—78.

- [10] 陈双莲,陈广学,陈奇峰,等. 混合多元醇对无溶剂聚氨酯覆膜胶性能的影响[J]. 包装工程,2012,33(7):40—43.

CHEN Shuang-lian, CHEN Guang-xue, CHEN Qi-feng, et al. Effects of Mixed-polyols on Properties of Solvent-free Polyurethane Laminating Adhesives[J]. Packaging Engineering, 2012, 33(7):40—43.

- [11] 王青,陈广学,陈双莲,等. 铝塑复合用聚氨酯胶粘剂的制备及性能研究[J]. 包装工程,2012,33(13):59—63.

WANG Qing, CHEN Guang-xue, CHEN Shuang-lian, et al. Preparation and Performance Study of Aluminum Composite Polyurethane Adhesive[J]. Packaging Engineering, 2012, 33(13):59—63.

- [12] CHEN Shuang-lian, CHEN Guang-xue, LIU Jiang-wen. Study on an Aliphatic Polyurethane Laminating Adhesive

Based on Castor Oil[J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 262:551—556.

- [13] 王文荣,刘伟区,苏倩倩. 硅烷封端羟基硅油改性端硅氧烷聚氨酯密封胶的研究[J]. 精细化学,2008,25(9):926—930.

WANG Wen-rong, LIU Wei-qu, SU Qian-qian. Study of Silylated Polyurethane Modified with Silane-endcapped Hydroxyl Silicone Oil[J]. Fine Chemicals, 2008, 25(9):926—930.

- [14] 宋海香,罗运军,罗巨涛,等. 羟基硅油共聚改性水性聚氨酯的制备、表征与性能[J]. 化工学报,2006,57(10):2486—2490.

SONG Hai-xiang, LUO Yun-jun, LUO Ju-tao, et al. Preparation, Characterization and Properties of Water Borne Polyurethane Modified through Copoly Merization by Hydroxy-terminated Silicon Oil[J]. Journal of Chemical Industry and Engineering, 2006, 57(10):2486—2490.

- [15] 宋常春. 热塑性聚氨酯弹性体的微相分离[J]. 合肥工业大学学报,2001,24(2):234—239.

SONG Chang-chun. Microphase Separation of Thermoplastic Polyurethane Elastomers[J]. Journal of Hefei University of Technology, 2001, 24(2):234—239.

- [16] 姚明,李伯耿,朱春风. 烷羟基硅油改性水性聚氨酯的制备和性能[J]. 科技通报,2007,23(4):574—577.

YAO Ming, LI Bo-geng, ZHU Chun-feng. The Preparation and Performance of Hydroxyl-containing Silicone Modified Waterborne Polyurethane[J]. Bulletin of Science and Technology, 2007, 23(4):574—577.

- [17] 詹彪,谭宝华,李青山. 羟基硅油改性水性聚氨酯的制备与性能研究[J]. 聚氨酯工业,2013,28(1):37—40.

ZHAN Biao, TAN Bao-hua, LI Qing-shan. Study on Preparation and Properties of PDMS Modified Waterborne Polyurethane[J]. Polyurethane Industry, 2013, 28(1):37—40.