

正切型非线性包装系统跌落冲击响应分析的何氏 PEM 与修正

宋浩¹, 李宏卫^{1, 2}

(1. 江苏联合职业技术学院 无锡机电分院, 无锡 214028; 2. 江南大学, 无锡 214122)

摘要: 目的 分析得到正切型非线性包装系统跌落冲击的近似解析解, 修正提高解的精度, 以达到工程要求。

方法 采用解决普遍非线性振动问题的 PEM, 并针对跌落冲击动态方程的求解进行了算法修正, 选取正切型非线性包装系统跌落冲击模型为算例, 求解得到了一阶近似解; 与包装工程中的能量法结合, 对近似解进行了修正。**结果** 修正后的最大位移响应、最大加速度响应、系统响应周期与 Runge-Kutta 数值解非常接近, 相对误差小于 4%。**结论** 研究为非线性包装系统跌落冲击响应分析提供了一种新的科学有效的近似分析方法。

关键词: 正切型非线性; 跌落冲击; 近似解析解; PEM; 能量法修正

中图分类号: TB122; TB485.1 **文献标识码:** A

Correction of He's Parameter-expanding Method for Analyzing Dropping Shock Response of Tangent Nonlinear Packaging System

SONG Hao¹, LI Hongwei^{1,2}

(1. Wuxi Machinery and Electronic Branch College, Jiangsu Union Technical Institute, Wuxi 214028;

2. Jiangnan University, Wuxi 214122)

Abstract: To analyze and get the approximate analytical solutions for dropping shock response of tangent nonlinear packaging system and to improve the accuracy of the solutions and achieve engineering requirements by correction, He's parameter-expanding method (PEM) is used that is applied to solve general nonlinear vibration problems. Taking tangent nonlinear packaging system dropping shock model for an example, for solving the dropping shock dynamic equations, the algorithm is modified and the first-order approximate solutions are obtained. A novel solution combining PEM with energy method was proposed and the approximation solution was corrected. The results show that the maximum displacement response, the maximum acceleration response of the system and the period of the response are very similar to the one by Runge-Kutta method, with relative error of <4%. This research provides a new scientific and effective method for the analysis of dropping shock response of nonlinear packaging system.

Key Words: tangent nonlinear; dropping shock; approximate analytical solutions; parameter-expanding method; correction with energy method

在工程领域存在很多非线性问题, 很难得到解析解。到目前为止, 已有很多方法用于求解非线性问题, 摄动法^[1-3]、变分迭代法^[4-6]、MAX-MIN^[7-9]、HFAF^[10-12]、PEM^[13-15]等, 各有优缺点。在包装工程领域^[16], 缓冲材料的非线性力学特性包括三次型、正切型和双曲正切型等, 有时表现为强非线性, 使得问题的理论分析十分困难。

何氏参数展开法(PEM)解决一般非线性振动问题, 简单有效, 并可以根据具体问题灵活地选用修正 Lindstedt-Poincare 法和簿记参数法。理论上讲, 跌落冲击属于振动的特殊情况, 可以采用类似的方法进行分析。跌落冲击与自由振动具有相同的控制方程, 但初始条件不同^[17], 针对这一特点, 首先修正 PEM 算法, 使其适用于跌落冲击问题的分析解决。

以正切型非线性包装系统跌落冲击为例, 简化后的控制方程, 适合采用修正 Lindstedt-Poincare 法, 同时结合包装动力学中的能量法, 得到满足工程分析需要的近似解析解。

1 修正 Lindstedt-Poincare 法

考虑以下非线性微分方程:

¹作者简介: 宋浩 (1982-), 男, 江苏启东人, 江苏联合职业技术学院讲师, 主要研究方向为 CAD/CAM/CAE。Email: 120903650@qq.com

通讯作者: 李宏卫 (1991-), 男, 山西阳泉人, 硕士生, 主要研究方向为运输包装。Email: lih9112@163.com

$$m\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0 \quad (1)$$

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2)$$

这里, ε 不必是一个很小的参数, $0 < \varepsilon < \infty$; f 是一个关于目标变量的多项式非线性函数。根据修正 Lindstedt-Poincare 法, 方程(1)的解可以表达为下列关于 ε 的级数:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (3)$$

同理, 系数 m 和 ω_0 可以表达为类似的形式:

$$m = 1 + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 m_2 + \dots \quad (4)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (5)$$

这里, ω 假设为所研究的非线性振动所要求的频率。

2 EM 的基本思想

在非线性系统的跌落冲击问题分析中, 通常使用能量法(EM)来得到系统的最大位移和最大加速度, 但是难以得到系统响应的周期和时间历程。对于非线性系统的跌落冲击问题, 如果没有系统阻尼, 理想情况下, 当缓冲材料变形达到最大值 x_m 时, 系统的重力势能将全部转化为弹性势能。假设包装系统的跌落高度为 h , 产品重量为 W , 系统的重力势能表达如下:

$$U = Wh \quad (6)$$

对于非线性包装系统, $f(x)$ 指恢复力, 是且仅是 x 的非线性函数。根据能量法, 有:

$$Wh = \int_0^{x_m} f(x) dx \quad (7)$$

代入参数, 计算可得最大位移 x_m 。系统的动态方程如下:

$$m\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (8)$$

求解上式可得最大加速度值 \ddot{x}_m 。

3 PEM 的应用及其修正

对于正切型非线性包装系统, 不考虑系统阻尼, 系统跌落冲击动态方程和跌落冲击初始条件可以表达为:

$$m\ddot{x} + 2k_0 \frac{d_b}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2d_b} = 0 \quad (9)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{2gh} \quad (10)$$

其中, m 为产品质量, x 为压缩变形量, k_0 和 d_b 分别为缓冲材料的初始弹性系数和压缩极限, g 是重力加速度, h 是产品跌落高度, \dot{x} 表示 x 对时间 t 的连续导数。为了利用修正 Lindstedt-Poincare 法进行分析

计算, 泰勒展开 $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2d_b} = \frac{\pi}{2d_b} x + \frac{\pi^3}{24d_b^3} x^3 + \frac{\pi^5}{960d_b^5} x^5 + \dots$, 把正切型非线性微分方程转化为三次-五次型非线性

性微分方程，如下：

$$m\ddot{x} + k_0x + rx^3 + qx^5 = 0 \quad (11)$$

系统的恢复力表达为：

$$f(x) = k_0x + rx^3 + qx^5 \quad (12)$$

引入参数 $k = \varepsilon\omega_0^2$ ， $\varepsilon = r/k_0$ ， $a = \sigma\omega_0^2$ ， $\sigma = q/k_0$ 和 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$ (频率参数)，系统跌落冲击动态方程和跌落冲击初始条件可以改写为：

$$\ddot{x} + \omega_0^2x + kx^3 + ax^5 = 0 \quad (13)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{2gh} \quad (14)$$

方程(13)的解和系数可以表达为下列形式：

$$x = x_0 + ax_1 + a^2x_2 + \dots \quad (15)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 + ab_1 + a^2b_2 + \dots \quad (16)$$

$$k = ac_1 + a^2c_2 + \dots \quad (17)$$

$$1 = 1 + ad_1 + a^2d_2 + \dots \quad (18)$$

把(15)—(18)式代入方程(13)，可以得到下列方程：

$$\begin{aligned} & (1 + ad_1 + a^2d_2 + \dots)(\ddot{x}_0 + a\ddot{x}_1 + a^2\ddot{x}_2 + \dots) + \\ & (\omega^2 + ab_1 + a^2b_2 + \dots)(x_0 + ax_1 + a^2x_2 + \dots) + \\ & (ac_1 + a^2c_2 + \dots)(x_0 + ax_1 + a^2x_2 + \dots)^3 + \\ & a(x_0 + ax_1 + a^2x_2 + \dots)^5 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

合并关于 a 的同次项，可以得到：

$$a^0: \quad \ddot{x}_0 + \omega^2x_0 = 0 \quad (20)$$

$$a^1: \quad \ddot{x}_1 + \omega^2x_1 + d_1\ddot{x}_0 + b_1x_0 + c_1x_0^3 + x_0^5 = 0 \quad (21)$$

联立式(14)和方程(20)，可得：

$$x_0(t) = \frac{\sqrt{2gh}}{\omega} \sin \omega t \quad (22)$$

参数展开法的一阶近似解中仅包含基频项，由于截断误差，基频项的振幅 A_0 被放大，认作精确解的振

幅 A ，即 $A = A_0$ 。容易理解，精确解的振幅与频率满足 $A = \frac{\sqrt{2gh}}{\omega}$ ；然而 $A_0 \neq \frac{\sqrt{2gh}}{\omega}$ 且应该是 $A_0 < \frac{\sqrt{2gh}}{\omega}$ ，

所以对于一阶近似解，有必要令：

$$x_0(t) = A_0 \sin \omega t \quad (23)$$

把 x_0 代入方程(21), 可得:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + (b_1 A_0 - d_1 A_0 \omega^2 + \frac{3c_1 A_0^3}{4} + \frac{5A_0^5}{8}) \sin \omega t - (\frac{c_1 A_0^3}{4} + \frac{5A_0^5}{16}) \sin 3\omega t + \frac{A_0^5}{16} \sin 5\omega t = 0 \quad (24)$$

为了避免上式的解中出现长期项, 需要有:

$$b_1 A_0 - d_1 A_0 \omega^2 + \frac{3c_1 A_0^3}{4} + \frac{5A_0^5}{8} = 0 \quad (25)$$

如果一阶近似解的精度符合要求, 那么根据式(16)–(18)有:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + ab_1 \quad (26)$$

$$k = ac_1 \quad (27)$$

$$1 = 1 + ad_1 \quad (28)$$

联立(25)–(28)式, 可得:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3}{4} k A_0^2 + \frac{5}{8} a A_0^4} \quad (29)$$

那么, 方程(13)的一阶近似解为:

$$x(t) = A_0 \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 + \frac{3}{4} k A_0^2 + \frac{5}{8} a A_0^4} t \right) \quad (30)$$

上式对时间 t 求导, 得到速度表达式:

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\omega_0^2 A_0^2 + \frac{3}{4} k A_0^4 + \frac{5}{8} a A_0^6} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 + \frac{3}{4} k A_0^2 + \frac{5}{8} a A_0^4} t \right) \quad (31)$$

为了直观地分析方程近似解的精度, 考虑参数 $m=10 \text{ kg}$, $h=0.6 \text{ m}$, $k_0 = 500 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1}$, $r = 72 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-3}$ 以及 $q = 0.0001 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-5}$ 的情形, 结合初始条件(14), 得到振幅 $A=3.0443 \text{ cm}$, 频率 $\omega=112.65 \text{ s}^{-1}$ 。

由式(13)可得 $\ddot{x}_m = \omega_0^2 x_m + kx_m^3 + ax_m^5$, 容易得到最大位移 $x_m = A = 3.0443 \text{ cm}$, 最大加速度 $\ddot{x}_m = 49.6015 \text{ g}$ 。

对于跌落冲击的动态问题, 利用四阶 Runge-Kutta 法可以得到方程(13)的数值解, 系统响应周期 $T=0.05386 \text{ s}$, 最大位移响应 $x_m = 3.35 \text{ cm}$, 最大加速度响应 $\ddot{x}_m = 61.7101 \text{ g}$ 。表 1 给出了 CPEM 与 Runge-Kutta 算法的结果对比, 周期的相对误差为 3.56%, 最大位移和最大加速度的相对误差分别为 9.13%和 19.62%。为了符合工程的需要, 需要对 CPEM 的一阶近似解作进一步的修正。

利用 EM 对 CPEM 法得到的近似解进行修正, 有:

$$Wh = \int_0^{x_m} (k_0 + rx^3 + qx^5) dx \quad (32)$$

最大位移可通过求解下式得到:

$$2qx_m^6 + 3rx_m^4 + 6k_0 x_m^2 - 12mgh = 0 \quad (33)$$

联立(29), (30)和(33)式, 可得能量法修正后方程的解。

表 1 简化正切型非线性系统 PEM 算法和改进 PEM 能量法修正与 Runge-Kutta 算法的结果对比
Tab.1 Comparison of solution by the CPEM and CPEM(E) with Runge-Kutta method for the cubic-quintic nonlinear system

	龙格-库塔法	改进参数展开法	相对误差 /%	能量法修正 改进参数展开法	相对误差 /%
最大位移响 应/cm	3.35	3.0443	9.13	3.2913	1.75
最大加速度 响应(g)	61.7101	49.6015	19.62	62.6920	1.59
周期/s	0.05386	0.05578	3.56	0.05215	3.17

代入参数, 可得能量法修正后振幅 $A_y = 3.2913\text{cm}$, 频率 $\omega_y = 120.4853\text{s}^{-1}$, 容易得到最大位移响应和最大加

速度响应分别为 $x_m = 3.2913\text{cm}$, $\ddot{x}_m = 62.6920\text{g}$ 。CPEM(E)法和 Runge-Kutta 算法的结果对比见表 1, 周期的相对误差为 3.17%, 最大位移和最大加速度的相对误差分别为 1.75%和 1.59%。此外, CPEM, CPEM(E)和 Runge-Kutta 算法的系统跌落冲击位移响应、加速度响应分别见图 1 和图 2, 可以看出 CPEM(E)的位移响应和加速度响应非常接近 Runge-Kutta 算法, 吻合度非常高。

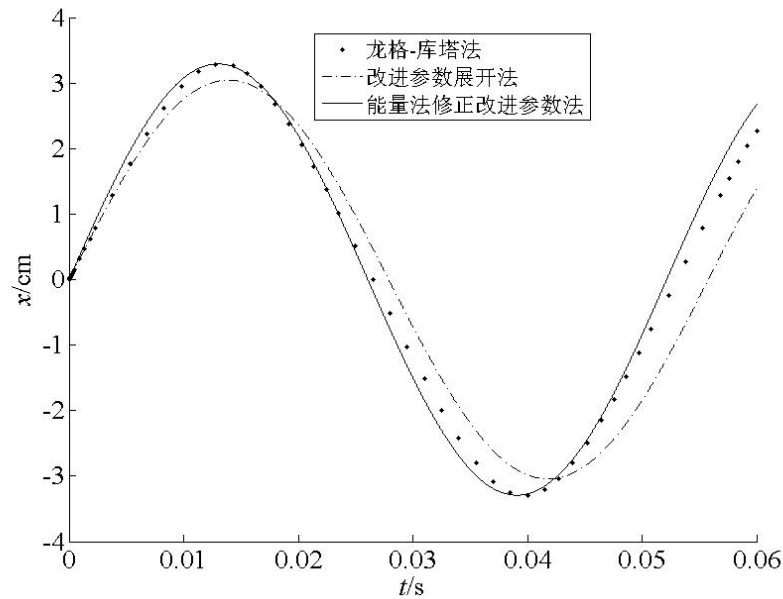


图 1 简化正切型非线性系统 CPEM 和 CPEM 能量法修正与 Runge-Kutta 算法位移响应对比

Fig.1 Comparison of the displacement response by the CPEM and CPEM(E) with the numerical simulation solved by the Runge-Kutta method for the cubic-quintic nonlinear system

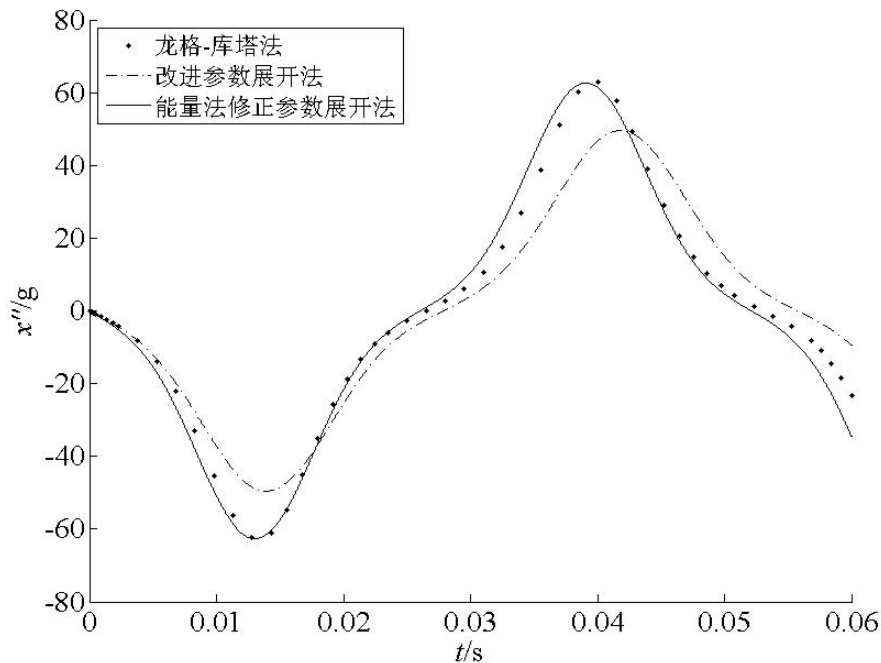


图2 简化正切型非线性系统 CPEM 和 CPEM 能量法修正与 Runge-Kutta 算法加速度响应比较

Fig.2 Comparison of the acceleration response by the CPEM and CPEM(E) with the numerical simulation solved by the Runge-Kutta method for the cubic-quintic nonlinear system

4 总结

缓冲材料非线性包装系统的研究已经日渐成熟，正切型非线性包装系统便是典型模型之一，因此研究正切型非线性包装系统跌落冲击具有重要意义。何氏 PEM 被广泛地应用于非线性问题的研究，采用其中的修正 Lindstedt-Poincare 法研究了近似模型的跌落冲击问题，得到了其一阶近似解。应用包装动力学中的能量法对近似解进行了修正，将修正后的最大位移响应、最大加速度响应、系统周期与四阶龙格-库塔法进行对比，结果非常接近，为非线性缓冲包装系统跌落冲击问题分析提供了一种新的简便有效的分析方法。

参考文献

- [1] NAYFEH A H. Perturbation Methods[M]. New York: John Wiley & Sons, 2008: 18-29.
- [2] 曾祥坤, 喻菲菲, 王小莉. 参数激励下带横向振动不稳定特性实测与计算[J]. 噪声与振动控制, 2014, 34(6): 12-16.
ZENG Xiang-kun, YU Fei-fei, WANG Xiao-li. Measurement and Computation of Instability Performance of Transverse Vibration for Serpentine Belt under Parametric Excitation[J]. Noise and Vibration Control, 2014, 34(6): 12-16.
- [3] 李琦, 邱志平, 张旭东. 基于二阶摄动法求解区间参数结构动力响应[J]. 力学学报, 2014, 47(1): 147-153.
LI Qi, QIU Zhi-ping, ZHANG Xu-dong. Second-order Parameter Perturbation Method for Dynamic Structures with Interval Parameters[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, 47(1): 147-153.
- [4] HE Ji-huan, WU Xu-hong. Variational Iteration Method: New Development and Applications[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 54: 881-894.
- [5] HE Ji-huan. Variational Iteration Method-some Recent Results and New Interpretations[J]. Journal of Computation and Applied Mathematics, 2007, 207(1): 3-17.
- [6] 宋爽, 王蕾, 陈安军. 悬挂式弹簧系统跌落冲击问题的变分迭代法[J]. 噪声与振动控制, 2013, 33(6): 36-39.
SONG Shuang, WANG Lei, CHEN An-jun. Variational Iteration Method for Analyzing Dropping Shock of Variational Iteration Method for Analyzing Dropping Shock of Suspended Spring System[J]. Noise and Vibration

Control,2013,33(6):36-39.

[7] GANJI S S,GANJI D D,DAVODI A G,et al.Analytical Solution to Nonlinear Oscillation System of the Motion of a Rigid Rod Rocking Back Using Max–Min Approach[J].Applied Mathematical Modelling,2010,34(9):2676-2684.

[8] ZENG De-qiang.Nonlinear Oscillator with Discontinuity by the Max–Min Approach[J].Chaos,Solitons and Fractals,2009,42(5):2885-2889.

[9] S R Seyedalizadeh GANJI,BARARI A,KARIMPOUR S,et al.Nonlinear Oscillation System of Mass with Serial Linear and Nonlinear Springs[J].Indian Journal of Physics,2013,87(8):787-792.

[10] 陈鸣,陈安军.非线性包装系统跌落冲击响应分析的HFAF法[J].包装工程,2014,35(15):40-43.

CHEN Ming,CHEN An-jun.He's Frequency-amplitude Formulation Method for Analyzing Dropping Shock Response of Cubic Nonlinear Packaging System[J].Packaging Technology and Science,2014,35(15):40-43.

[11] HE Ji-huan.An Improved Amplitude-frequency Formulation for Nonlinear Oscillators[J].International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation,2008,9(2):211-212.

[12] HE Ji-huan.Comment on 'He's Frequency Formulation for Nonlinear Oscillators'[J].Eur J Phys,2008,29: L19–L22.

[13] HE Ji-huan.Modified Lindstedt: Poincare Methods for Some Strongly Non-linear Oscillations:Part I: Expansion of a Constant[J].International Journal of Non-Linear Mechanics,2002,37(2):309-314.

[14] ZENGIN F Ö,KAYA M O,DEMIRBAĞ S A.Approximate Period Calculation for Some Strongly Nonlinear Oscillation by He's Parameter-expanding Methods[J].Nonlinear Analysis:Real World Applications,2009,10(4):2177-2182.

[15] SHOU D H,HE Ji-huan.Application of Parameter-expanding Method to Strongly Nonlinear Oscillators[J].International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation,2007,8(1):121-124.

[16]王军,卢立新,王志伟.产品破损评价及防护包装力学研究[J].振动与冲击,2010,29(8):43-45.

WANG Jun,LU Li-xin,WANG Zhi-wei.Product Damage Evaluation and Protective Packaging Dynamics[J].Journal of Vibration and Shock,2010,29(8):43-45.

[17] 王军,王志伟.考虑易损件的正切型包装系统冲击破损边界曲面研究[J].振动与冲击,2008,27(2):166-167.

WANG Jun,WANG Zhi-wei.Damage Boundary Surface of a Tangent Nonlinear Packaging System with Critical Component[J].Journal of Vibration and Shock,2008,27(2):166-167.