非线性包装系统跌落冲击响应分析

李宏卫[1]，王军[1,2]
（1.江南大学，无锡 214122；2.江苏省先进食品装备制造技术重点实验室，无锡 214122）

摘要：目的 分析得到非线性保守包装系统跌落冲击的近似解析解。**方法** 提出一种新的非线性分析方法，选取三次非线性和瓦楞纸板型的混合非线性跌落冲击模型为例，分析得到近似解析解。**结果** 原控制方程无需简化，近似精度随着近似阶数的提高而提高，对强非线性问题仍然有效。**结论** 该研究为非线性包装系统跌落冲击响应分析提供了一种新的分析方法。

关键词：跌落冲击；近似解析解；原控制方程；复杂非线性
中图分类号：TB487；TB485.1 **文献标识码：**A **文章编号：**1001-3563(2016)21-0018-05

Dropping Shock Response Analysis of Nonlinear Packaging System

LI Hong-wei[1], *WANG Jun*[1,2]
(1.Jiangnan University, Wuxi 214122, China;
2.Jiangsu Key Laboratory of Advanced Food Manufacturing Equipment and Technology, Wuxi 214122, China)

ABSTRACT: The work aims to analyze and obtain the approximate analytical solutions for dropping shock response of nonlinear packaging system. A new nonlinear analytical technique was introduced. Cubic nonlinear and corrugated board hybrid nonlinear dropping shock models were selected as examples and the approximations were obtained by analysis. The original governing equation needed no simplification. The approximation accuracy was increased with the improved approximate orders. The method was still valid to strong nonlinear problems. This research provides a new analysis technique to the dropping shock response of nonlinear packaging system.

KEY WORDS: dropping shock; approximate analytical solutions; original governing equation; complex nonlinear

在包装工程领域，由于缓冲包装材料力学性能复杂及其多变的结构特点，缓冲包装的动力学特性呈现多样及复杂的强非线性特征。非线性科学的研究历经1个多世纪取得了丰富的成果，形成了众多各具特色的理论分析手段，例如摄动技术[1—3]、谐波平衡法[4—6]、变分迭代法[7—9]和同伦分析法[10—12]等，它们或可解决非保守非线性问题，或可解决强非线性问题以及多解问题，但是大都不适用于包装工程领域的非线性问题。

缓冲材料具有复杂的强非线性恢复力，例如正切型、双曲正切型，瓦楞纸板甚至具有几种形状函数混合的非线性模型。目前的研究中，在不需要解析响应表达式时采用数值算法，数值分析解物理意义不够明确，有时难以判断与真正物理解的拟合程度。在解析求解时，则需要简化原始控制方程[13—15]，将复杂的恢复力项简化成多项式形式。弱非线性情况下，化简前后的控制方程具有相似的力学含义，但对于强非线性系统，其误差之大已使研究失去意义。为解决这类问题，文中提出一种新的非线性保守问题分析方法，针对缓冲包装的跌落冲击问题，以三次非线性和瓦楞纸板的混合模型为研究对象，求解其跌落冲击响应。

收稿日期：2016-07-19
作者简介：李宏卫（1991—），男，山西阳泉人，江南大学硕士生，主攻运输包装。
通讯作者：王军（1982—），男，安徽巢湖人，博士，江南大学教授，主要研究方向为运输包装。

1　新非线性算法

考虑一般非线性系统：

$$L[u(r)]+N[u(r)]=g(r) \tag{1}$$

式中：L 为线性算子；N 为非线性算子；$g(r)$ 为已知函数；$u(r)$为未知的待求函数；r 为时间的或空间的独立变量。对于大多数非线性问题，精确解并不能被得到，但可以用适合的级数来近似精确解。首先，可以根据给定的控制方程和边始条件来选择近似表达解的基函数。假设式(1)级数解的基函数可以选取为：

$$\{u_m(r)|m=0,1,2,\cdots\} \tag{2}$$

那么，方程(1)的近似解可以表达为：

$$u(r)\approx\tilde{u}(r)=c_0u_0(r)+c_1u_1(r)+c_2u_2(r)+\cdots+c_nu_n(r)+\cdots \tag{3}$$

式中：c 为近似解中各项的系数。一般地，如果给定的条件为 $r=s$，那么 $u(s)$，$u'(s)$以及 $u^{(n)}(s)$的精确值可以通过对式(1)连续求导来得到。可以建立一个方程组：

$$\begin{cases}c_0u_0(s)+c_1u_1(s)+c_2u_2(s)+\cdots+c_nu_n(s)+\cdots=u(s)\\ c_0u_0'(s)+c_1u_1'(s)+c_2u_2'(s)+\cdots+c_nu_n'(s)+\cdots=u'(s)\\ \cdots\\ c_0u_0^{(n)}(s)+c_1u_1^{(n)}(s)+c_2u_2^{(n)}(s)+\cdots+c_nu_n^{(n)}(s)+\cdots=u^{(n)}(s)\\ \cdots\end{cases} \tag{4}$$

式(4)中方程的个数应该与未知数的个数相等，且可能由非线性代数方程组成而存在多个解。为了筛选出未知数最佳的表达或数值，可以利用平方残差：

$$E(c_{1,x},c_{2,x},\ldots,c_{n,x},\ldots)=\int_0^r[R(r;c_{1,x},c_{2,x},\ldots,c_{n,x},\ldots)]^2\mathrm{d}r \tag{5}$$

式中：x 为式(4)中解的个数；R 为精确解与近似解的差；E 为平方残差。

$$R(r;c_{1,x},c_{2,x},\ldots,c_{n,x},\ldots)=L[\tilde{u}(r)]+N[\tilde{u}(r)]-g(r) \tag{6}$$

使得 $E(c_{1,x}, c_{2,x}, \ldots, c_{n,x}, \ldots)$最小的未知数表达或数值就是这里要求的。

2　算例分析

在该部分，以上算法将用于非线性包装系统跌落冲击的响应求解问题，为简洁方便并更具一般性，这里考虑无量纲的控制方程与初始条件。

2.1　三次型非线性

$$\ddot{u}+u+\varepsilon u^3=0 \tag{7}$$

初始条件：

$$u(0)=0,\ \dot{u}(0)=V \tag{8}$$

式中：$\ddot{u}$为 u 对 t 的连续 2 阶导数；V 为无量纲冲击初速度值；ε 为非线性项的无量纲系数。基函数可以选取为：

$$\{\sin[(2m-1)\omega t]|m=1,2,3,\cdots\} \tag{9}$$

式中：ω 为待求解的频率。那么近似级数解可以表达为：

$$u(t)\approx\tilde{u}(t)=\sum_{m=1}^{+\infty}c_m\sin[(2m-1)\omega t] \tag{10}$$

式中：c_m 为待求系数。为了表达的简洁性，只用式(10)中的两项以公式的形式来近似式(7)在初始条件(8)下的精确解。更多项的近似也将会与精确解进行比较来阐述方法的精确性。

将式(7)对 t 连续 3 次求导，并结合初始条件，容易得到：

$$\dddot{u}(0)=-V \tag{11}$$

$$u^{(5)}(0)=V-6\varepsilon A^3 \tag{12}$$

那么可以建立方程组：

$$\begin{cases}\omega(c_1+c_2)=V\\ \omega^3(c_1+27c_2)=V\\ \omega^5(c_1+243c_2)=V-6\varepsilon V^3\end{cases} \tag{13}$$

式(13)显然是非线性代数方程组，为选取合适的未知数表达式或数值，考虑计算效率，使用下面的离散平方残差：

$$E_m(\omega_x,c_{1,x},c_{2,x},\cdots,c_{n,x},\cdots)\approx\sum_{k=0}^{N}[R_m(\tau_k;c_{1,x},c_{2,x},\cdots,c_{n,x},\cdots)]^2 \tag{14}$$

式中：m 为近似精确解的项数；N 为一个整数。

$$\tau_k=\frac{2k\pi}{N} \tag{15}$$

$$R_m(\tau_k;c_{1,x},c_{2,x},\cdots,c_{n,x},\cdots)=\omega_x^2\ddot{\tilde{u}}(\tau_k)+\tilde{u}(\tau_k)+\varepsilon\tilde{u}^3(\tau_k) \tag{16}$$

对于足够大的 N，式(14)可以很好地近似式(5)。这里取 N=100。通过求解式(13)并使用式(14)，得到近似解：

$$\omega=\frac{1}{3}A \tag{17}$$

$$c_1=\frac{-VA-594\varepsilon V^3A+VA^{3/2}+54\varepsilon V^3A^{3/2}}{24-288\varepsilon V^2+864\varepsilon^2V^4} \tag{18}$$

$$c_2=\frac{27VA+38\varepsilon V^3A-3VA^{3/2}-2\varepsilon V^3A^{3/2}}{24-288\varepsilon V^2+864\varepsilon^2V^4} \tag{19}$$

其中，

$$A=\sqrt{5+\sqrt{16+54\varepsilon V^2}} \tag{20}$$

精确频率可记作：

$$\omega_{\mathrm{e}}=\pi\Big/\int_0^{\pi/2}\left\{8[(1+2\varepsilon V^2)^{1/2}-1]\cos^2\varphi\Big/\left\{2\varepsilon V^2-2[(1+2\varepsilon V^2)^{1/2}-1]\sin^2\varphi-[(1+2\varepsilon V^2)^{1/2}-1]^2\sin^4\varphi\right\}\right\}^{1/2}\mathrm{d}\varphi \tag{21}$$

为了阐述方法的有效性，不同参数下的频率 ω 和不同阶近似的最小离散平方残差 $E_{\min}(\omega, c_1, c_2,\dots, c_n, \dots)$见表 1。由表 1 可以看出，高阶近似可以得到更精确的频率解，并且对于弱非线性情况来讲，低阶近似可得到足够精度的频率解。表 1 中近似频率的有效位数根据近似程度确定，如在 ε=1，V=0.01 参数取值下，系统非线性较弱，2 项阶近似频率已非常接近精确值，故只取两位有效数字表示，表 2 同理。表 1 也同样说明了周期解的误差随着所考虑的三角函数项的增多而减小，并且近似解析解在强非线性情况下依然有效。

表 1 不同参数下的频率和最小离散平方残差

Tab.1 Comparison of frequency and discrete squared residual corresponding to various parameters of system

近似解项数	频率					最小离散平方残差				
	ε=1, V=0.01	ε=1, V=0.1	ε=1, V=1.0	ε=1, V=10.0	ε=1, V=100.0	ε=1, V=0.01	ε=1, V=0.1	ε=1, V=1.0	ε=1, V=10.0	ε=1, V=100.0
2	1.0	1.0037	1.2187	2.9551	10.0782	3.459×10^{-20}	3.287×10^{-10}	0.221	9.440×10^{-3}	1.451×10^{-7}
5	1.0	1.0037	1.2413	3.2373	10.0782	2.253×10^{-48}	1.995×10^{-26}	1.469×10^{-7}	0.919	2.076×10^{3}
10	1.0	1.0037	1.2413	3.2403	10.0915	2.050×10^{-96}	1.597×10^{-54}	6.041×10^{-19}	4.090×10^{-8}	1.064×10^{2}
15	1.0	1.0037	1.2413	3.2403	10.0915	7.484×10^{-145}	5.126×10^{-83}	9.617×10^{-31}	6.496×10^{-16}	8.273×10^{-12}
精确值	1.0	1.0037	1.2413	3.2403	10.0915					

2.2 混合型非线性

考虑 B 楞双层瓦楞纸板的简单动力学控制方程：

$$\ddot{u}+a_1u+a_2\sin(a_3u)+a_4\tan(a_5u)=0 \tag{22}$$

式中：恢复力的 3 项分别表示力-变形过程中的线性段、波形段和大应变时应力急剧增加段；$\ddot{u}$ 为 u 对 t 的连续 2 阶导数。

初始条件：

$$u(0)=0,\quad \dot{u}(0)=V \tag{23}$$

类似地，基函数和近似解表达仍选用式(9)—(10)。对 t 连续 3 次求导，可得：

$$\dddot{u}(0)=-(a_1+a_2a_3+a_4a_5)V \tag{24}$$

$$u^{(5)}(0)=(a_1^2+2a_1a_2a_3+2a_1a_4a_5+a_2^2a_3^2+2a_2a_3a_4a_5+a_4^2a_5^2)V+(a_2a_3^2-2a_4a_5^3)V^3 \tag{25}$$

建立方程组：

$$\begin{cases}\omega(c_1+c_2)=V\\ \omega^3(c_1+27c_2)=(a_1+a_2a_3+a_4a_5)V\\ \omega^5(c_1+243c_2)=(a_1^2+2a_1a_2a_3+2a_1a_4a_5+a_2^2a_3^2+2a_2a_3a_4a_5+a_4^2a_5^2)V+(a_2a_3^2-2a_4a_5^3)V^3\end{cases} \tag{26}$$

式中：ω，c_1 和 c_2 为待求未知数。为选取合适的表达式和数值，同样使用离散平方残差式(14)。$R_m(\tau_k; c_{1,x}, c_{2,x},\cdots, c_{n,x},\cdots)$ 应该改写为：

$$R_m(\tau_k; c_{1,x}, c_{2,x},\cdots, c_{n,x},\cdots)=\omega^2\ddot{\tilde{u}}(\tau_k)+a_1\tilde{u}(\tau_k)+a_2\sin[a_3\tilde{u}(\tau_k)]+a_4\tan[a_5\tilde{u}(\tau_k)] \tag{27}$$

通过求解式(26)和使用式(14)，得到近似解：

$$\omega=\frac{1}{3}\sqrt{5(a_1+a_2a_3+a_4a_5)+X} \tag{28}$$

$$c_1=V\omega[a_1^2X+a_2^2a_3^2X+a_4^2a_5^2X+2(a_1a_2a_3X+a_1a_4a_5X+a_2a_3a_4a_5X)+4(a_1^3+a_2^3a_3^3+a_4^3a_5^3)- \\ 9a_2a_3^3V^2X+12(a_1^2a_2a_3+a_1^2a_4a_5+a_2^2a_3^2a_4a_5+a_1a_2^2a_3^2+a_1a_4^2a_5^2+a_2a_3a_4^2a_5^2)+ \\ 18a_4a_5^3V^2X+24a_1a_2a_3a_4a_5+54(a_2^2a_3^4V^2+a_1a_2a_3^3V^2+a_2a_3^3a_4a_5V^2)- \\ 108(a_4^2a_5^2V^2+a_1a_4a_5^3V^2+a_2a_3a_4a_5^3V^2)]/(24Y) \tag{29}$$

$$c_2=V\omega[a_2a_3^3VX-2a_4a_5^3V^2X-9(a_2^2a_3^2X+a_1^2X+a_4^2a_5^2X)-14(a_2^2a_3^4V+a_2a_3^3a_4a_5V^2+a_1a_2a_3^3V^2)- \\ 18(a_2a_3a_4a_5X+a_1a_2a_3X+a_1a_4a_5X)+28(a_4^2a_5^2V^2+a_2a_3a_4a_5^3V^2+a_1a_4a_5^3V^2)+ \\ 36(a_1^3+a_2^3a_3^3+a_4^3a_5^3)+108(a_2^2a_3^2a_4a_5+a_1^2a_4a_5+a_2a_3a_4^2a_5^2+a_1a_2^2a_3^2+a_1a_4^2a_5^2)+ \\ 216a_1a_2a_3a_4a_5]/(72Y) \tag{30}$$

式中：

$$X=\sqrt{-9a_2a_3^3V^2+16(a_1^2+a_2^2a_3^2+a_4^2a_5^2)+18a_4a_5^3V^2+32(a_1a_2a_3+a_1a_4a_5+a_2a_3a_4a_5)} \tag{31}$$

$$Y=(a_1^2+a_4^2a_5^2+a_2a_3^3V^2+2a_1a_2a_3+2a_1a_4a_5+2a_2a_3a_4a_5-2a_4a_5^3V^2)^2 \tag{32}$$

同样地，为了阐述方法的有效性，得出混合型非线性在不同参数取值下的频率和最小离散平方残差，见表 2。由表 2 可知，在任意的合理系统参数取值范围内，问题的近似解析解都可以得到，并且随着近似阶数的提高更加接近精确值。对于如式(22)的具有复杂非线性项的微分方程，不需要对其近似简化，可以直接得到原控制方程的近似解析解。

表 2 混合型非线性在不同参数取值下的频率和最小离散平方残差

Tab.2 Comparison of frequency and discrete squared residual corresponding to various parameters for hybrid nonlinear

近似解项数	频率					最小离散平方残差				
	条件1	条件2	条件3	条件4	条件5	条件1	条件2	条件3	条件4	条件5
2	3.3188	3.5012	3.3251	9.3485	11.0484	3.233×10^{-9}	538.805	8.555×10^{-5}	1.745	60.145
5	3.3188	3.8616	3.3257	9.4409	11.4117	2.206×10^{-21}	31.335	2.399×10^{-13}	6.519×10^{-7}	0.183
10	3.3188	3.9838	3.3257	9.4409	11.4309	1.971×10^{-41}	2.217	2.225×10^{-27}	6.136×10^{-18}	2.37×10^{-5}
15	3.3188	4.0130	3.3257	9.4409	11.4311	2.075×10^{-61}	0.244	2.430×10^{-41}	3.908×10^{-29}	3.494×10^{-9}

表 2 中的条件 1 为 $a_1=a_2=a_4=1$，$a_3=a_5=5$，$V=0.1$；条件 2 为 $a_1=a_2=a_4=1$，$a_3=a_5=5$，$V=1$；条件 3 为 $a_1=a_3=a_5=1$，$a_2=a_4=5$，$V=1$；条件 4 为 $a_1=a_4=a_5=1$，$a_2=a_3=10$，$V=1$；条件 5 为 $a_1=a_2=a_3=1$，$a_4=a_5=10$，$V=1$。

考虑包装系统的跌落冲击问题，往往需要知道冲击持续时间，最大变形量以及冲击最大加速度。冲击持续时间 τ 应满足 $\tau=\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{\omega}$，当 $t=T/4$ 时，冲击位移达到最大，即 $u_{\max}=c_1-c_2$，冲击最大加速度满足 $\ddot{u}_{\max}=\omega^2(c_1-c_2)$，其中，$\omega$，$c_1$ 及 c_2 均由计算可以得到。至此，得到了二项阶三角函数表达的跌落冲击问题近似解。

3 结语

文中主要提出了一种新的非线性分析算法，针对具有复杂非线性项的非线性跌落冲击问题，得到了原控制方程的近似解析解，并且可以根据工程实际的需要得到具有足够精度的冲击持续时间、最大变形量和最大冲击加速度。该方法简单高效，可以解决强非线性问题，为包装工程的跌落冲击问题提供了一种有效的研究手段。

参考文献：

[1] NAYFEH A H. Perturbation Methods[M]. New York: John Wiley & Sons, 2008.

[2] 应祖光，王振林. 缓冲包装设计的灵敏度分析[J]. 包装工程, 1999, 20(3): 14—16.
YING Zu-guang, WANG Zhen-lin. Sensitivity Analysis of Packaged Cushioning Design[J]. Packaging Engineering, 1999, 20(3): 14—16.

[3] 李琦，邱志平，张旭东. 基于二阶摄动法求解区间参数结构动力响应[J]. 力学学报，2014，47(1): 147—153.
LI Qi, QIU Zhi-ping, ZHANG Xu-dong. Second-order Parameter Perturbation Method for Dynamic Structures with Interval Parameters[J]. Chinese Journal of Theo-

retical and Applied Mechanics, 2014, 47(1): 147—153.

[4] HU H, TANG J H. Solution of a Duffing-harmonic Oscillator by the Method of Harmonic Balance[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006(3): 637—639.

[5] AL-SHYYAB A, KAHRAMAN A. Non-linear Dynamic Analysis of a Multi-mesh Gear Train Using Multi-term Harmonic Balance Method: Sub-harmonic Motions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005(1): 417—451.

[6] PIRMORADIAN M, KESHMIRI M, KARIMPOUR H. Instability and Resonance Analysis of a Beam Subjected to Moving Mass Loading via Incremental Harmonic Balance Method[J]. Journal of Vibroengineering, 2014, 16(6): 2779—2789.

[7] HE J H, WU X H. Variational Iteration Method: New Development and Applications[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 54(7): 881—894.

[8] HE J H. Variational Iteration Method: Some Recent Results and New Interpretations[J]. Journal of Computation and Applied Mathematics, 2007(1): 3—17.

[9] 严敏, 陈安军. 跌落工况下斜支承系统响应分析的变分迭代法[J]. 包装工程, 2012, 33(13): 71—74.
YAN Min, CHEN An-jun. Variational Iteration Method for Response Analysis of Inclined Support Packaging System under Dropping Condition[J]. Packaging Engineering, 2012, 33(13): 71—74.

[10] 廖世俊. 同伦分析方法: 求解强非线性问题的一个新途径[J]. 科学观察, 2009(5): 48—49.
LIAO Shi-jun. Homotopy Analysis Method: A New Way of Solving the Strong Nonlinear Problem[J]. Science Focus, 2009(5): 48—49.

[11] LIAO S J. Notes on the Homotopy Analysis Method: Some Definitions and Theorems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(4): 983—997.

[12] LIAO S J. Proposed Homotopy Analysis Techniques for the Solution of Nonlinear Problems[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 1992.

[13] HONG X, WANG J, LU L X. Application of Homotopy Perturbation Method with an Auxiliary Term for Nonlinear Dropping Equations Arisen in Polymer Packaging System[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013(3): 133—174.

[14] WANG J, WANG Z W, DUAN F, et al. Dropping Shock Response of Corrugated Paperboard Cushioning Packaging System[J]. Journal of Vibration and Control, 2012, 19(3): 336—340.

[15] HE J H. Variational Iteration Method, a Kind of Non-Linear Analytical Technique: Some Examples[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1999, 34(4): 699—708.