

# 包装系统非线性特性识别方法

朱大鹏

(兰州交通大学, 兰州 730070)

**摘要:** **目的** 建立一种能同时识别包装系统中非线性弹性和非线性阻尼特性的方法。**方法** 首先将单自由度包装系统运动方程式推导为第 1 类 Volterra 非线性积分方程式, 为在包含噪声的条件下准确求出方程的解, 采用 Landweber 迭代正则化方法求解该积分方程, 由于迭代次数对求解结果的准确性有很大的影响, 文中采用 L 曲线准则确定迭代的次数。在求解 Volterra 方程后, 利用方程的解和系统自由响应数据同时识别包装系统非线性弹性和非线性阻尼。**结果** 文中采用一个数字实例验证了该方法的准确性。**结论** 文中提出的方法可有效识别包装系统的非线性特性。

**关键词:** 包装系统; 非线性; Landweber 正则化; L 曲线准则

**中图分类号:** TB487 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2016)21-0046-06

## Identification Method of Nonlinear Properties in Packaging System

ZHU Da-peng

(Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**ABSTRACT:** The work aims to establish a method to simultaneously identify the nonlinear elasticity and non-linear damping properties in the packaging system. First, the motion equation of packaging system of single degree of freedom was deduced as Volterra nonlinear integral equation of first kind. The Landweber iteration regularization method was adopted to find the accurate solution of the Volterra integral equation in the noisy background. Since the number of the iterations had great effects on the accuracy of the solution, the L-curve criterion was used to determine the appropriate iteration number. After solving the Volterra equation, the free response data of the packaging system as well as the solution of Volterra equation was used to identify nonlinear elasticity and non-linear damping properties simultaneously. The accuracy of this method was investigated through a digital example. The method proposed in this paper can be used to effectively identify the nonlinearity of the packaging system.

**KEY WORDS:** packaging system; nonlinearity; Landweber iteration regularization; L-curve criterion

包装系统非线性特性的研究, 对于分析包装件的响应、确保包装件安全、优化包装设计具有重要意义<sup>[1]</sup>。包装系统中的弹性特性和阻尼特性对其中的产品和易损件的响应均具有重要影响<sup>[2-5]</sup>。近年来, 国内外的研究者在运输包装领域开展了大量的针对包装系统非线性特性的研究。高德等<sup>[6-7]</sup>利用粘弹性理论, 根据实验结果建立了聚乙烯泡沫非线性

性粘弹性模型, 并进行了参数识别, 基于该模型, 对包装系统进行了优化设计。文献[8]考虑了包装件的转动因素, 建立了包装系统的双曲正切非线性和正切非线性的跌落模型, 分析了系统的响应情况。DENG<sup>[9]</sup>考虑了包装中的聚氨酯泡沫的非线性弹性特性和粘弹性, 采用分数阶微分的方法建立了准静态条件下材料的模型, 并进行了参数识别。

收稿日期: 2016-07-10

基金项目: 甘肃省高等学校科研项目 (2013B-024); 兰州市人才创新创业项目 (2015-RC-62)

作者简介: 朱大鹏 (1977—), 男, 河南方城人, 博士, 兰州交通大学教授, 主要研究方向为运输包装。

Azizi 等对 Deng 的方法进行了改进, 将粘弹性力用线性应变率及应变的非线性函数与松弛算子的卷积进行表示, 并给出了参数识别的方法<sup>[10]</sup>。张秀梅<sup>[11]</sup>建立了麦秆发泡衬垫在受到跌落冲击时的非线性粘弹性模型, 具有良好的准确性。

文中研究单自由度包装系统中非线性弹性特性和非线性阻尼特性的识别方法。通过该方法, 首先记录包装系统在不同初始条件下的瞬态自由响应数据, 结合反问题的求解, 可建立能够同时识别包装系统非线性弹性特性和阻尼特性的方法。数值分析结果表明, 该方法具有良好的准确性和可靠性。

## 1 单自由度包装系统运动方程分析

单自由度非线性包装系统自由响应时, 其运动方程式可写为:

$$m\ddot{x} + kx = r(x) + c(\dot{x}) \quad (1)$$

系统初始条件为:  $x(0) = \alpha, \dot{x}(0) = \beta$ 。

式中:  $m$  为包装系统的集中质量;  $k$  为系统的弹性常数; 函数  $r(x)$  为系统非线性弹性特性; 假定包装系统的非线性阻尼特性仅与速度相关, 用函数  $c(\dot{x})$  表示。令  $\Phi(t) = r(x) + c(\dot{x})$ , 则式(1)可写为:

$$m\ddot{x} + kx = \Phi(t) \quad (2)$$

该单自由度非线性包装系统见图 1。

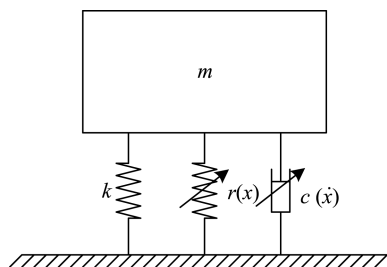


图 1 包装系统

Fig.1 Schematic of packaging system

令  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  为式(2)所对应的齐次方程  $m\ddot{x} + kx = 0$  的解, 齐次方程的通解为  $c_1x_1 + c_2x_2$ , 根据常数变易法<sup>[12-13]</sup>, 设式(1)的通解形式为:

$$x(t) = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2 \quad (3)$$

下面确定未知函数  $c_1(t)$  和  $c_2(t)$ , 为方便起见, 用  $c_1$  和  $c_2$  分别代替  $c_1(t)$  和  $c_2(t)$ 。

对式(3)两端求导可得:  $\dot{x} = \dot{c}_1x_1 + c_1\dot{x}_1 + \dot{c}_2x_2 + c_2\dot{x}_2$ 。

由于需要 2 个未知函数  $c_1(t)$  和  $c_2(t)$ , 可以规

定它们再满足一个条件。为了使  $\dot{x}$  的表达式中不含  $\ddot{c}_1$  和  $\ddot{c}_2$ , 令:

$$\dot{c}_1x_1 + \dot{c}_2x_2 = 0 \quad (4)$$

则有:

$$\dot{x} = c_1\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 \quad (5)$$

式(5)两边再求导可得:

$$\ddot{x} = \dot{c}_1\dot{x}_1 + c_1\ddot{x}_1 + \dot{c}_2\dot{x}_2 + c_2\ddot{x}_2 \quad (6)$$

将式(5)和式(6)代入式(2), 整理可得:

$$\dot{c}_1\dot{x}_1 + \dot{c}_2\dot{x}_2 = \frac{\Phi}{m} \quad (7)$$

将式(4)与式(7)联立方程组, 可得:

$$\dot{c}_1 = -\frac{\Phi x_2}{m(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2)}$$

$$\dot{c}_2 = \frac{\Phi x_1}{m(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2)}$$

对求得的  $\dot{c}_1$  和  $\dot{c}_2$  积分, 并代入式(2)中, 可得:

$$x(t) = \frac{\alpha}{\mu_1}x_1(t) + \frac{\beta}{\mu_2}x_2(t) + \int_0^t \frac{x_1(\tau)x_2(t) - x_1(t)x_2(\tau)}{mW} \Phi(\tau) d\tau \quad (8)$$

$x_1(t)$  满足条件:  $m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$ ,  $x_1(0) = \mu_1$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$ 。 $x_2(t)$  满足条件:  $m\ddot{x}_2 + kx_2 = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $\dot{x}_2(0) = \mu_2$ 。

文中为方便计算, 令  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\omega = \sqrt{k/m}$ , 计算可得:  $x_1 = \cos(\omega t)$ ,  $x_2 = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$ 。

令  $W = x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2 = 1$ , 故式(8)可写为:

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \int_0^t \frac{x_1(\tau)x_2(t) - x_1(t)x_2(\tau)}{m} \Phi(\tau) d\tau \quad (9)$$

## 2 非线性特性的识别

根据式(9), 有:

$$x(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t) = \int_0^t K(t, \tau) \Phi(\tau) d\tau \quad (10)$$

$x_1(t)$  和  $x_2(t)$  为已知,  $x(t)$  可通过实验记录或通过龙格-库塔法模拟得到, 故式(10)左边为已知。因为  $\Phi(t) = r(x) + c(\dot{x})$ , 即系统的非线性特性均包含在函数  $\Phi(t)$  中。算子  $K$  的定义为:

$$K(t, \tau) = \frac{x_1(\tau)x_2(t) - x_1(t)x_2(\tau)}{m}$$

式(10)属于第 1 类 Volterra 积分式, 在  $x(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  和算子  $K(t, \tau)$  已知的条件下, 可利用反问题的求解方法求解出包含系统非线性弹性特性和

非线性阻尼特性的  $\Phi(t)$ 。

下面分析在利用反问题的求解方法求出非线性特性  $\Phi(t)$  之后, 如何求出系统的非线性弹性特性  $r(x)$  和非线性阻尼特性  $c(\dot{x})$ 。通过实验仪器记录或者模拟出包装系统的位移自由响应  $x(t)$  和速度自由响应  $\dot{x}(t)$ , 见图 2。

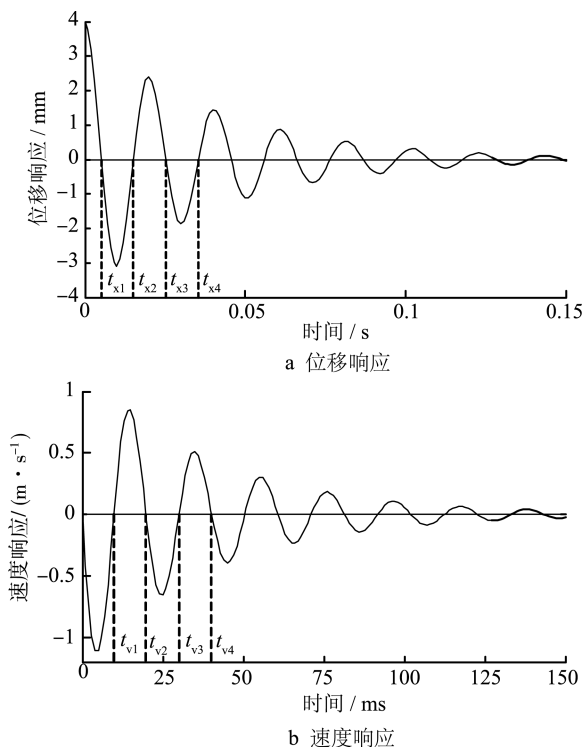


图 2 包装系统的响应

Fig.2 Packaging system response

分别记录系统位移响应曲线上的零点  $t_{x1}$ ,  $t_{x2}$ , ..., 及速度响应曲线上的零点  $t_{v1}$ ,  $t_{v2}$ , ..., 表示为:

$$x(t_{xi}) = 0, i = 1, 2, \dots$$

$$\dot{x}(t_{vi}) = 0, i = 1, 2, \dots$$

根据  $\Phi(t) = r(x) + c(\dot{x})$ , 有:

$$\Phi(t_{xi}) = c[\dot{x}(t_{xi})] \quad (11)$$

$$\Phi(t_{vi}) = r[x(t_{vi})] \quad (12)$$

式(11)—(12)表明, 在求出  $\Phi(t)$  之后, 根据系统位移响应和速度响应求出它们的零点, 可分别依据这些零点处的速度、位移及  $\Phi$  的值, 拟合出包装系统的非线性弹性特性  $r(x)$  和阻尼特性  $c(\dot{x})$ 。

利用式(11)—(12)分析系统非线性特性的方法与系统响应的初始条件  $\alpha$  和  $\beta$  无关, 但在一个初始条件下, 系统的响应为特性识别所提供的离散点是有限的。为提高系统非线性特性识别的可靠性, 在其他的初始条件下也可求出  $\Phi(t)$ , 并利用式

(11)—(12)求出系统非线性特性的离散点。将所有这些离散点拟合起来, 可更加可靠地分析出系统的非线性弹性特性  $r(x)$  和阻尼特性  $c(\dot{x})$ 。

### 3 $\Phi(t)$ 的求解

在分析包装系统非线性特性之前, 首先要根据式(10)求出  $\Phi(t)$ , 式(10)左边为已知, 在右边的积分式中,  $K(t, \tau)$  为已知, 式(10)为第 1 类 Volterra 积分式, 求解  $\Phi(t)$  可用反问题的求解方法求得。式(10)中, 令  $\eta(t) = x(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t)$ , 故式(10)可写为:

$$K \cdot \Phi(t) = \eta(t) \quad (13)$$

由于算子  $K$  是紧线性算子, 对于精确的  $\eta(t)$ , 方程(13)存在唯一解  $\Phi(t)$ 。在实验过程中, 由于记录的实验数据  $x(t)$  通常具有一定的噪声误差, 因此, 式(13)右端的数据  $\eta^\delta$  也包含有一定的误差, 且满足  $\|\eta^\delta(t) - \eta(t)\|_2 < \delta$ 。其中  $\|\cdot\|_2$  为向量的二范数。一般说来, 式(11)的求解通常是不适定的, 在  $\eta(t)$  存在误差的条件下, 若由对应的方程  $K \cdot \Phi^\delta(t) = \eta^\delta(t)$  直接求解  $\Phi(t)$ , 则  $\eta(t)$  中即使很低水平的噪声干扰, 都会造成  $\Phi(t)$  的解存在较大误差, 因此求解时必须采用正则化的方法, 以确保解的正确性。

由于 Landweber 迭代正则化方法具有稳定性好, 且对迭代初值不敏感的优点, 文中选择 Landweber 迭代正则化方法求解在一定噪声水平下  $\Phi(t)$  的解。Landweber 正则化方法的基本迭代方程为:

$$\Phi_j = \Phi_{j-1} - \lambda L^* [L(\Phi_{j-1}) - L^*(\eta)], j = 1, 2, \dots \quad (14)$$

式中: 向量  $\eta$  为已知; 参数  $\lambda$  为常数且  $\lambda > 0$ ;  $L$  算子为积分算子, 对于任意函数  $z(t)$ , 该算子定义为  $L(z) = \int_0^t K(t, \tau) z(\tau) d\tau$ 。

文中  $L(\Phi)$  为:

$$L(\Phi) = \int_0^t \frac{1}{m\omega} [\cos(\omega\tau) \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \sin(\omega\tau)] \cdot \Phi(\tau) d\tau \quad (15)$$

算子  $L^*$  为积分算子  $L$  的伴随算子, 根据伴随算子的定义<sup>[14]</sup>, 经推导, 可得:

$$L^*(\Phi) = \int_t^a \frac{1}{m\omega} [\cos(\omega t) \sin(\omega\tau) - \cos(\omega\tau) \sin(\omega t)] \cdot \Phi(\tau) d\tau \quad (16)$$

积分上限  $a$  取决于包装系统自由响应的时间,

这里  $a$  取为 0.15 s。

由于 Landweber 迭代法对迭代的初始值不敏感, 即对于任意的迭代初始值, 该方法均可迭代收敛至正确解, 因此选取  $\Phi_0=0$ 。

经过式(14)—(16)的计算和迭代, 可在已知向量  $\eta$  的条件下求出包含系统非线性特性的向量  $\Phi$ 。

#### 4 包装材料非线性特性识别实例

以瓦楞纸板衬垫为例, 介绍如何利用系统自由响应数据分析系统非线性弹性特性和阻尼特性。

利用质量块和瓦楞纸板衬垫模拟单自由度包装系统, 该系统自由响应的运动方程式(1), 其基本参数为<sup>[15]</sup>:  $m=10$  kg;  $k=930.14$  kN/m;  $r(x) = k_3x^3 = -1.5 \times 10^{10}x^3$ ;  $c(\dot{x}) = c\dot{x} + c_3\dot{x}^3 = -490.8\dot{x} - 120\dot{x}^3$ 。系统的初始条件为:  $x(0)=5$  mm;  $\dot{x}(0)=0$ ; 假定记录的数据的误差水平  $\|\eta^\delta(t) - \eta(t)\|_2 < \delta$  中,  $\delta=0.01$ 。

令  $\Phi_0=0$ , 利用式(14)迭代求解向量  $\Phi$ , 随着迭代次数的增加, 向量  $\Phi_j$  逐步向真值逼近。向量  $\Phi_j$  达到最优值之后, 由于向量  $\eta$  中的噪声的影响, 随着迭代次数的进一步增加, 向量  $\Phi_j$  会逐渐背离真值发展, 造成较大的误差, 因此, 确定合理的迭代次数对于准确求出向量  $\Phi$  是非常重要的。

这里利用 L 曲线准则<sup>[16]</sup>确定最优迭代次数。利用该准则时, 在不同的迭代次数的条件下利用 Landweber 迭代正则化求解向量  $\Phi$ , 以横坐标代表  $\|L(\Phi_j) - \eta^\delta\|_2$  的值, 以纵坐标代表  $\|\Phi_j\|_2$ , 绘制出一个点。不同的迭代次数条件下, 这些点通常连接后形成一个“L”形曲线。该曲线表明, 随着迭代次数的增加,  $\|\Phi_j\|_2$  逐步达到一个稳定的值, 即表明向量  $\Phi_j$  此时达到了最优解, 随着迭代次数的进一步增加, 由于向量  $\eta^\delta$  中噪声的影响,  $\Phi_j$  会背离其真实值发展, 造成  $\|\Phi_j\|_2$  的继续增加, 甚至是突然增加。最佳的 Landweber 迭代次数对应着 L 曲线上的左下角的点。根据 L 曲线原则, 可确定出 Landweber 迭代正则化的最优迭代次数。用于确定最优迭代次数的 L 曲线见图 3, 从该 L 曲线可以看出, 当  $j=1000$  时,  $\|\Phi_j\|_2$  达到了稳定值, 随着迭代次数的进一步增加, 由于误差的作用, 造成了  $\|\Phi_j\|_2$  的进一步增加, 因此可确定最优迭代次数为 1000 次。不同迭代次数条件下识别出的  $\Phi(t)$  与真实的  $\Phi(t)$  对比见图 4。

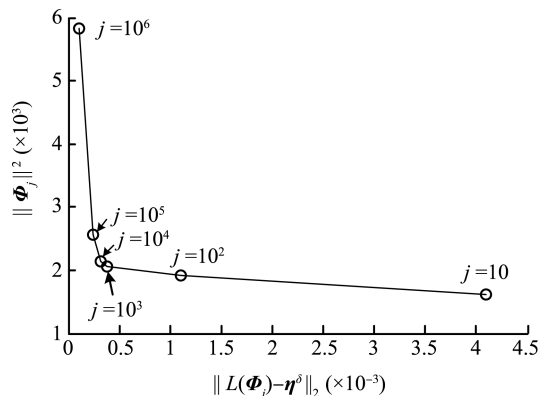


图 3 用于确定最优迭代次数的 L 曲线

Fig.3 Optimal iteration number determination by L curve criterion

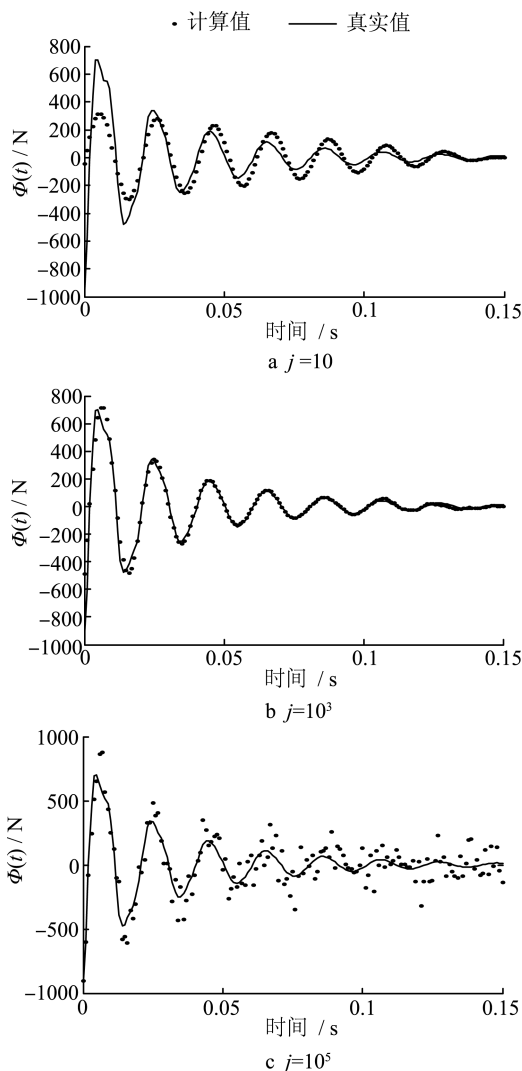


图 4 迭代次数对计算精度的影响

Fig.4 Effect of iterations on the identification accuracy of  $\Phi(t)$

在求出  $\Phi(t)$  之后, 利用式(11)—(12)求出系统非线性弹性特性和阻尼特性在离散速度点和离散位移点的值。由于文中求系统非线性特性的计算方

法与系统的初始状态无关,为提高曲线拟合的准确性,改变系统自由响应的初始状态,求出 $\Phi(t)$ ,利用式(11)—(12)求出系统非线性特性的拟合点。文中在4个初始状态下拟合包装系统的非线性特性: $\alpha_1=5\text{ mm}, \beta_1=0; \alpha_2=4\text{ mm}, \beta_2=0; \alpha_3=-5\text{ mm}, \beta_1=0; \alpha_4=-4\text{ mm}, \beta_4=0$ 。识别的结果见图5,可以看出,文中提出的方法可以准确识别包装系统非线性弹性特性和阻尼特性,且在一定的记录噪声水平下具有良好的准确性和可靠性。

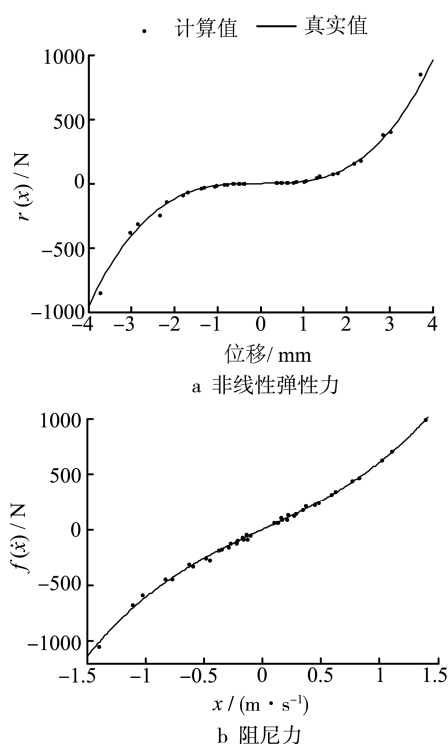


图5 识别结果

Fig.5 Identification results

根据式(2),在求出 $\Phi(t)$ 之后,由于系统的加速度响应 $\ddot{x}$ 很容易由加速度传感器测得,因此,可分析出系统的弹性常数 $k$ 。

## 5 结语

包装系统中,缓冲材料非线性特性的识别对于准确分析包装系统的响应、优化包装设计等具有重要意义。文中分析了单自由度包装系统的自由响应方程,建立了一种根据系统自由响应的数据,能同时识别包装材料非线性弹性特性和阻尼特性的方法,且与非线性特性的形式无关,无需事先了解非线性特性的数学形式,具有良好的普适性。该方法能在一定的噪声水平下准确识别出系统的非线性

特性,具有良好的可靠性。

文中提出的方法对于建立分析包装系统、包装材料非线性特性的试验方法,确定包装系统非线性特性的数学形式,具有重要的理论指导意义。

## 参考文献:

- [1] 李光,阮丽,高德,等. 非线性运输包装系统动力学建模研究进展[J]. 包装工程, 2015, 36(19): 1—6.  
LI Guang, RUAN Li, GAO De, et al. Research Progress of Dynamic Modeling of Nonlinear Transport Packaging System[J]. Packaging Engineering, 2015, 36(19): 1—6.
- [2] 黄秀玲,王军,卢立新,等. 三次非线性包装系统关键部件冲击响应影响因素分析[J]. 振动与冲击, 2010, 29(10): 179—181.  
HUANG Xiu-ling, WANG Jun, LU Li-xin, et al. Factors Influencing Shock Characteristics of a Cubic Nonlinear Packaging System with Critical Component[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(10): 179—181.
- [3] 王雷,王志伟,王军. 三次非线性包装系统关键部件三维冲击谱研究[J]. 振动与冲击, 2010, 29(7): 92—93.  
WANG Lei, WANG Zhi-wei, WANG Jun. Three-dimensional Shock Spectra of a Cubic Nonlinear Packaging System with Critical Component[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(7): 92—93.
- [4] 王军,卢立新,王志伟. 三次非线性多层堆码包装系统关键部件三维组合冲击谱研究[J]. 振动与冲击, 2011, 30(1): 188—190.  
WANG Jun, LU Li-xin, WANG Zhi-wei. 3-D Combined Shock Response Spectrum of a Cubic Nonlinear Stacked Packaging System with Critical Components[J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(1): 188—190.
- [5] 王军,卢立新,王志伟. 双曲正切包装系统关键部件三维冲击谱研究[J]. 振动与冲击, 2010, 29(10): 99—101.  
WANG Jun, LU Li-xin, WANG Zhi-wei. Three-dimensional Shock Spectrum of a Hyperbolic Tangent Nonlinear Packaging System with Critical Component [J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(10): 99—101.
- [6] 高德,卢富德. 聚乙烯缓冲材料多自由度跌落包装系统优化设计[J]. 振动与冲击, 2012, 31(3): 69—72.  
GAO De, LU Fu-de. Optimization Design of MD of Package Cushioning System Made of Polyethylene[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(3): 69—72.
- [7] GAO De, LU Fu-de. Nonlinear Dynamic Analysis of Series Cushioning System Made with Expanded Polyethylene and Corrugated Paperboard[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2013(6): 1—5.

- [8] 高德, 卢富德. 考虑转动的双曲正切与正切组合模型缓冲系统冲击响应研究[J]. 振动工程学报, 2012, 25(1): 6—11.  
GAO De, LU Fu-de. The Shock Response of Hyperbolic Tangent and Tangent Comprehensive Model on Cushion System Considering Rotary Motion[J]. Journal of Vibration Engineering, 2012, 25(1): 6—11.
- [9] DENG R, DAVIES P, BAJAJ A K. A Nonlinear Fractional Derivative Model for Large Uni-Axial Deformation Behavior of Polyurethane Foam[J]. Signal Processing, 2006, 86(10): 2728—2743.
- [10] AZIZI Y, DAVIES P, BAJAJ A K. Identification of Nonlinear Viscoelastic Models of Flexible Polyurethane Foam from Uniaxial Compression Data[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 2016(2): 13.
- [11] 张秀梅, 徐伟民. 麦秆发泡包装衬垫非线性粘弹性模型及参数识别[J]. 包装工程, 2010, 31(5): 17—19.  
ZHANG Xiu-mei, XU Wei-min. Nonlinear Viscoelastic Models of the Straw Foamed Packaging Material and Parameters Identification[J]. Packaging Engineering, 2010, 31(5): 17—19.
- [12] 赵爱民, 李美丽, 韩茂安. 微分方程基础理论[M]. 北京: 科学出版社, 2011.  
ZHAO Ai-min, LI Mei-li, HAN Mao-an. Basic Theories of Differential Equations[M]. Beijing: Science Press, 2011.
- [13] MURDOCK J A. Perturbations[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [14] CONWAY J B. A Course in Functional Analysis[M]. Berlin: Springer Verlag, 1985.
- [15] 朱大鹏, 周世生. 瓦楞纸板在冲击激励下的动态特性建模与响应分析[J]. 机械科学与技术, 2013, 32(2): 257—262.  
ZHU Da-peng, ZHOU Shi-sheng. Dynamic Modeling and Response Analysis of Corrugated Paperboard to Shock Excitation[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2013, 32(2): 257—262.
- [16] HANSEN P C. Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L-Curve[J]. SIAM Review, 1992, 34(4): 561—580.