

包装技术与工艺

直四棱柱自锁底成型锁合点模切线

王鹏^{1,2}, 牟信妮³, 张书驰¹, 王丽超¹, 孙诚^{1,3}, 黄利强¹
(1.天津科技大学, 天津 300222; 2.赛闻工业有限公司, 天津 300457;
3.天津职业大学, 天津 300410)

摘要: **目的** 针对长方体(正方体)自锁底纸盒成型过程中粘合余角底面容易出现卡滞、破损的现象, 研究其自锁底纸盒粘合余角底面的切点轨迹。**方法** 集中研究长方体(正方体)自锁底纸盒的粘合余角底面在成型过程中的切点在三维坐标中的轨迹问题, 确定参数轨迹方程为正弦函数曲线。**结果** 不论长方体的长和宽是否相等, 自锁底纸盒粘合余角底面的切点轨迹都是正弦函数曲线。**结论** 该正弦函数曲线的设计可以避免自锁底纸盒成型过程中出现的卡滞和破损现象, 同时使自锁底粘合纸盒的盒底设计更加合理。

关键词: 自锁底; 粘合余角; 切点运动轨迹; 模切线; 正弦函数曲线; 三维坐标

中图分类号: TB482.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2016)23-0089-04

Die Tangent of the Auto End-lock Formed Locking Point of the Straight Quadrangular Prism

WANG Peng^{1,2}, MOU Xin-ni³, ZHANG Shu-chi¹, WANG Li-chao¹,
SUN Cheng^{1,3}, HUANG Li-qiang¹

(1.Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China;

2.Seven Industrial Co., Ltd., Tianjin 300457, China;

3.Tianjin Vocational Institute, Tianjin 300410, China)

ABSTRACT: The work aims to study the point trajectory at the bottom of adhesive coangle of auto end-lock box regarding the clamping stagnation and damage occurring at the bottom of adhesive coangle in the process of forming cuboid (square) auto end-lock box. The study was concentrated on the point trajectory in the 3D coordinates at the bottom of adhesive coangle in the process of forming cuboid (square) auto end-lock box, so as to determine locus equation of the parameters as sin curve. No matter whether the length and width of the cuboid were equal, the point trajectory at the bottom of adhesive coangle of the auto end-lock box was sin curve. The design of such sin curve can avoid clamping stagnation and damage occurring in the process of forming auto end-lock box and enable the design of the bottom of the auto end-lock adhesive box to be more rational.

KEY WORDS: auto end-lock; adhesive coangle; point trajectory; die tangent; sine curve; 3D coordinates

长方体(正方体)自锁底纸盒一般在成型过程中会出现卡滞现象, 而且现在设计的长方体(正方体)自锁底纸盒粘合余角底面切点模切线都是直线,

这更是给纸盒成型带来了不便, 而且会使纸盒成型过程中出现锁合底面破损的现象。为了解决这个问题, 首次提出把粘合余角^[1-2]底面切点模切线在成

收稿日期: 2016-05-25

基金项目: 天津市艺术科学研究规划项目(E12074)

作者简介: 王鹏(1990—), 男, 河北人, 天津科技大学硕士生, 主攻运输包装与包装结构设计。

通讯作者: 孙诚(1955—), 男, 山西人, 天津科技大学教授、博导, 主要研究方向为包装结构设计。

型过程中转化为三维建模中的轨迹,笔者通过理论计算得出粘合余角底面模切线不是直线而是 $(b \cdot \sin \theta)/2$ 的正弦函数曲线。

1 自锁底结构与底面切点轨迹

目前的自锁底纸盒展开结构见图1,自锁底成型结构模切线 TS 为直线,并且在 T 点与 K 点重合的时候不会出现卡滞现象,但是为了稳定纸盒的自锁性能,线段 KT 应该设计成一个纸板厚度的长度。

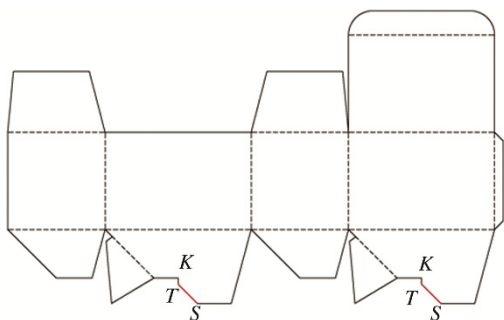


图1 目前的自锁底纸盒展开结构

Fig.1 The structure of the self locking bottom paper box at present

自锁底纸盒粘合余角展开结构见图2。粘合角 (δ) 是与旋转点相交的盒底作业线与裁切线所构成的角,在自锁底主片的粘合面中,以旋转点为顶点的2条粘合面边界线构成的角度叫粘合角,即 $\angle QOW$ (如图2)。当纸盒盒底平折或张开时,为避免底片与体板相互影响,通过对纸盒包装结构形态的设计活动使包装结构合理、功能完善^[3]。实际设计中粘合角一般比理论值小 $2^\circ \sim 5^\circ$,而且粘合角在旋转点相连接处切去一个小直角,这是为了防止自锁底成型时在固胶工段纸板反弹^[4]。

在自锁底纸盒主底片上,与旋转点相交的作业线和盒体与盒底的交线所构成的角度叫粘合余角^[1],即 $\angle QOE$ (如图2)。

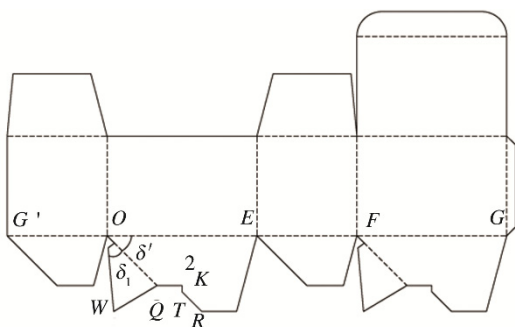


图2 自锁底纸盒粘合余角展开结构

Fig.2 The structure of the self locking box bottom bond angle

在自锁底纸盒成型过程中,2个粘合余角底面模切线 ST 与 $S'T'$ 永远相切^[5],切点为 P 点,见图3。自锁底纸盒从展平状态到成型为直立状态过程中,2个粘合余角底面切点从 T 点开始到 S 点结束,并且这个过程中他们的切点 P 是一个动点, P 点沿着曲线 ST 随着自锁底成型^[6-7]过程中粘合余角底面与侧板的夹角的改变而运动,从而产生粘合余角底面切点运动轨迹,最终这条轨迹 ST 就是粘合余角底面切点的模切线。

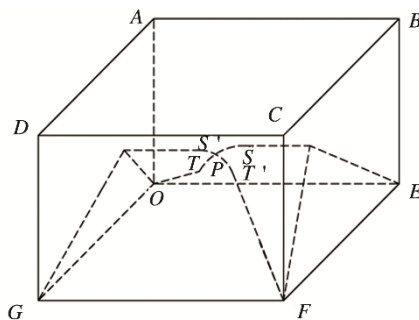


图3 自锁底纸盒成型过程中的一种状态

Fig.3 The state in the forming process of the self locking bottom paper box

2 粘合余角底面切点轨迹计算

2.1 三维建模

在三维直角坐标系中,长方体(正方体)自锁底折叠纸盒位置和状态见图4,为了方便建立模型,现在只画出折叠纸盒的一部分。自锁底折叠纸盒的位置: O 点为 xyz 三维直角坐标系的原点; OE 延长线为 x 轴; OA 延长线为 z 轴; OG 与 y 轴夹角为 θ ; P 点为2个粘合余角底面在自锁底纸盒成型过程中的切点,设 P 点在三维直角坐标系中的坐标为 (x, y, z) ,并且在自锁底纸盒成过程中面 $OABE$ 不

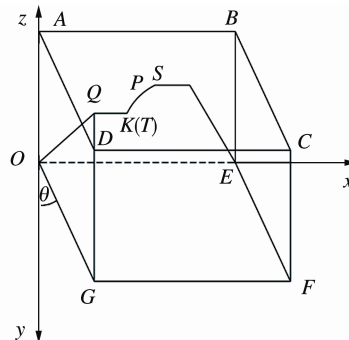


图4 自锁底纸盒在自定义三维坐标系中建模状态

Fig.4 Modeling state of self locking bottom paper box in the custom three-dimensional coordinate system

动, 且面 $OABE$ 与直角坐标 xz 面重合, 在这样的基础下建立三维坐标模型 $ABCD O E F G$ 。

2.2 转化为参数

在图 4 的基础上作辅助线, 连接 OF 和 EG , 作 PN 垂直于面 $O E F G$, 交点为 N , 作 PM 垂直于线段 OE , 交点为 M , 连接 MN , 过 N 点作 NL 平行于 OE , 交 OG 于点 L , 过 N 点作 NR 平行于 OG , 交线段 OE 于点 R , 再过 Q 点作 QJ 垂直于面 $O E F G$, 交于点 J , 过 Q 作 QH 垂直于线段 OE , 交于点 H , 连接 HJ , 见图 5。

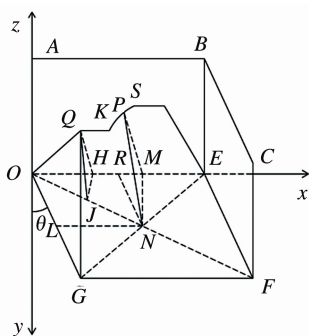


图 5 自锁底纸盒在自定义三维坐标系中作辅助线
Fig.5 Making of the auxiliary line of self locking bottom paper box in the custom three-dimensional coordinate system

题设: 长方体 (正方体) 自锁底折叠纸盒 $ABCD O E F G$ 的长为 l 、宽为 b 、高为 h , P 点坐标为 (x, y, z) , OG 与 y 轴夹角为 θ 。

求证: N 点永远是平行四边形 $O E F G$ 的形心; $\angle MNR = \theta$; P 点的参数化方程为 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ 。

1) N 点永远是平行四边形 $O E F G$ 的形心。在自锁底折叠纸盒 $ABCD O E F G$ 成型过程中, 因为 2 个粘合余角底面 ST 永远相切, 并且自锁底折叠纸盒 $ABCD O E F G$ 成型过程中关于 OF , EG 的交点对称, 所以 $NR = OG/2$, $NL = OE/2$, $NE = NG$, $NO = NF$, 可以得到 N 点为平行四边形 $O E F G$ 的形心, 并且 N 点为 P 点在面 $O E F G$ 的投影点。同理可知, J 点为平行四边形 $ORNL$ 的形心, J 点为 Q 点在面 $O E F G$ 的投影点。

2) $\angle MNR = \theta$ 。因为 $NR \parallel OG$, $NL \parallel OE$, $MN \perp OE$, 所以 $MN \parallel y$ 轴, 得出 $\angle MNR = \theta$ (同位角相等), 即 $\angle MNR$ 等于自锁底折叠纸盒 $ABCD O E F G$ 成型过程中 OG 所在面与 yz 平面的夹角。

3) P 点的参数化方程为 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ 。由前文可以得出 $OM = x$, $MN = y$, $PN = z$ 。由 $\delta + \delta' = 90^\circ$, 得

出粘合余角 $\delta' = 45^\circ$, 因此 $\angle QOE = \delta' = 45^\circ$ 。经过计算得出 $QH = OH = NR = OG/2 = b/2$, $NL = RO = l/2$, 并且 $OM = x = OR + RM$ 。设 $\angle PMN = \theta_1$, 如图 5, 粘合余角底面切点轨迹的计算过程: P 点坐标, $x = OM = OR + RM = l/2 + (b \sin \theta)/2$, $y = MN = (b \cos \theta)/2$, $z = PN = (b \cos \theta)/2 \tan \theta_1$, $\tan \theta_1 = PN/MN = QJ/HJ = z/y$ 。在 $\triangle OMN$ 与 $\triangle OHJ$ 中, $\angle MON = \angle HOJ$ (同一个角), $\angle OHJ = \angle OMN = 90^\circ$, 因此 $\triangle OMN \sim \triangle OHJ$, 有 $OH/OM = HJ/MN$, 得出 $HJ = (OH \cdot MN)/OM$, $HJ = b^2 \cos \theta / (l + b \cos \theta) = by / (2x)$, 在 $\triangle QHJ$ 里由勾股定理得到 $QJ^2 + HJ^2 = QH^2$, 得出 $QJ = \frac{b\sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$, $\tan \theta_1 =$

$$PN/MN = QJ/HJ = z/y = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y}, \text{ 最后得出}$$

$z = \sqrt{x^2 - y^2}$, 该方程即为 2 个自锁底粘合余角底面上的切点 P 在自锁底纸盒成型的三维坐标系中的参数化轨迹方程^[8-15]。

2.3 转化为 θ 的表达式

P 点参数化轨迹方程为 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, 并且有 $x = OM = OR + RM = l/2 + (b \sin \theta)/2$, $y = MN = (b \cos \theta)/2$, $z = PN = (b \cos \theta)/2 \tan \theta_1$, 且 $\tan \theta_1 = PN/MN = QJ/HJ = z/y = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y}$, 这 4 个式子联立可以得出 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, 即 $x^2 = y^2 + z^2$, 在 $\triangle PMN$ 中 $y = MN = (b \cos \theta)/2$, $z = PN = (b \cos \theta)/2 \tan \theta_1$, 有 $x^2 = MN^2 + PN^2$, 可知 $x = OM = OR + RM = l/2 + (b \sin \theta)/2$, 可得 $OM^2 = MN^2 + PN^2$, 在 $\triangle PMN$ 中 $PM^2 = MN^2 + PN^2$, 有 $PM = OM = l/2 + (b \sin \theta)/2$, 此函数表达式即 P 点在自锁底纸盒成型过程中的轨迹方程的 θ 表示方式, 并且起点为 K , 即 $\theta = 0^\circ$ 时, $PM = l/2$, 即 $P(l/2, b/2, 0)$, 这就表明, P 点在自锁底纸盒成型过程中的轨迹就是起点为 K 终点为 R , 函数为 $(b \sin \theta)/2$ 的正弦函数曲线。

3 粘合余角底面模切线设计

3.1 长方体长和宽相等时

长方体长和宽相等时自锁底粘合余角底面切点模切线见图 6。长方体长 l 和宽 b 相等时, $\angle TOE$ 为粘合余角, 即 $\delta' = 45^\circ$, ST 为自锁底粘合余角底面切点 P 的模切线, 并且它的轨迹为 $(l \sin \theta)/2$ 的正

弦函数曲线,另外需要注意 K 点与 OE 直线垂直距离为 $l/2$,这时 K 点与 T 点重合,但是不会影响锁合强度,因为这种情况为4个锁合点重合。

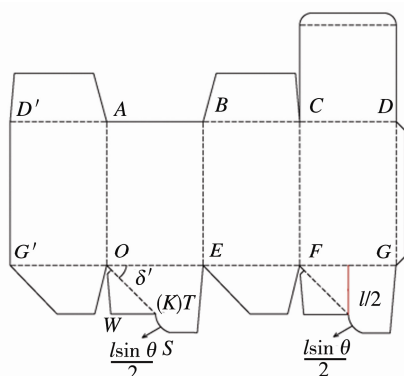


图6 自锁底纸盒长和宽相等时模切版展开结构

Fig.6 Die cutting plate expansion structure when length and width of self locking bottom paper box are equal

3.2 长方体长和宽不相等时

长方体长和宽不相等时自锁底粘合余角底面切点模切线见图7。长方体长 l 和宽 b 不相等, $\angle QOE$ 为粘合余角,即 $\delta'=45^\circ$, ST 为自锁底粘合余角底面切点 P 的模切线,并且它的轨迹为 $(b \sin \theta)/2$ 的正弦函数曲线。另外需要注意 QK 与 OE 直线的垂直距离为 $b/2$, K 点与 T 点直线距离为 d (纸板的厚度),为了锁合牢固, T 点与 S 点直线距离应该小于 $(b/2-d)$,因为当它的距离大于 $(b/2-d)$ 时,会使直线 OE 到点 S 距离大于宽度 b ,这将直接影响纸盒成型。

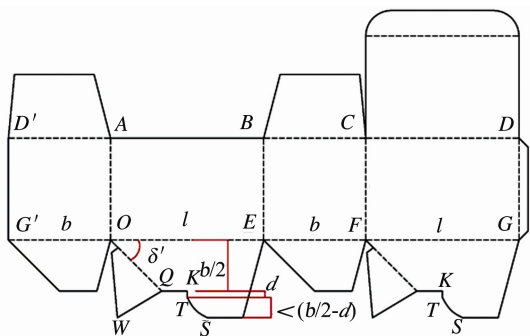


图7 自锁底纸盒长和宽不相等时模切版展开结构

Fig.7 Die cutting plate expansion structure when length and width of self locking bottom paper box are not equal

4 结语

2个自锁底粘合余角底面上的切点 P 在自锁底纸盒成型过程中的 $(b \sin \theta)/2$ 的正弦函数曲线轨迹就是自锁底粘合余角底面 RT 的模切线,该模切线不仅可以降低自锁底纸盒锁合状态的应力,增加自锁底的锁合强度,而且可以解决自锁底纸盒成型过程中的卡滞、

破损现象。该正弦函数曲线轨迹模切线更是给自锁底纸盒底面设计增加了更为全面的理论依据。另外,该模切线在研究过程中使用了三维建模的方法来分析动态点在纸盒成型过程中的运动轨迹,这种方法不仅增加了结构设计与数学学科之间科学研究方法的联系性,而且增加了自身学习和利用数学知识、数学逻辑思维的广度和深度。

参考文献:

- [1] 孙诚,黄利强,王涛,等.包装结构设计[M].北京:中国轻工业出版社,2014.
SUN Cheng, HUANG Li-qiang, WANG Tao, et al. Packaging Structure Design[M]. Beijing: China Light Industry Press, 2014.
- [2] 孙诚,牟信妮,魏娜,等.包装结构与模切版设计[M].北京:中国轻工业出版社,2014.
SUN Cheng, MOU Xin-ni, WEI Na, et al. Package Structure & Die-cutting Plate Design[M]. Beijing: China Light Industry Press, 2014.
- [3] 魏力敏.纸盒包装结构形态的趣味性设计[J].包装工程,2007,28(12):190—192.
WEI Li-min. Interesting Design of Paper Box Packaging Structural Form[J]. Packaging Engineering, 2007, 28(12): 190—192.
- [4] 宋启明.浅议我国包装设计存在的问题及发展战略[J].商场现代化,2008(4):186—187.
SONG Qi-ming. Discussion on the Problems and Development Strategy of Packaging Design in China[J]. Market Modernization, 2008(4): 186—187.
- [5] 王德忠.纸盒结构参数化设计及让刀问题的处理[J].包装工程,2002,23(6):52—54.
WANG De-zhong. Parametric Design of Carton Structure and Handling of the Problem of Cutting[J]. Packaging Engineering, 2002, 23(6): 52—54.
- [6] GARROFE J M. Structural Packaging[M]. Singapore: Pageone Press, 2005.
- [7] CHENJ M. 1000 Packaging Structure[M]. Hong Kong: Design Media Publishing Limited, 2011.
- [8] CHAZAN D, CHAIM D, GORMAS J, et al. Shared Teaching Assignments in the Service of Mathematics Reform Situated Professional Development[J]. Teaching and Teacher Education, 1998, 14(7): 687—702.
- [9] PILOUK M, TEMPFLI K, MOLENAAR M. A Tetrahedron-based 3D Vector Data Model for Geoinformation[J]. Advanced Geographic Data Modeling, 1994 (4):129—140.
- [10] HOULding S W. 3D Geoscience Modeling: Computer Techniques for Geological Characterization[M]. Berlin: Springer-verlag, 1994.
- [11] WU L X. Topological Relations Embodied in a Generalized Tri-prism(GTP)Model for a 3D Geosciences Modeling System[J]. Computers&Geosciences, 2004, 30(4): 405—418.
- [12] GOLIN M, NA H S. On the Average Complexity of 3D-Voronoi Diagrams of Random Points on Convex Polytopes[J]. Computational Geometry, 2003, 25(3): 197—231.
- [13] BOADA I. Approximations of 3D Generalized Voronoi Diagrams[C]// Eindhoven: European Workshop on Computational Geometry, 2005.
- [14] AHDUL-RAHMAN A, PILOUK M. Spatial Data Modelling for 3D GIS[M]. New York: Springer, 2008.
- [15] ABBIT A. Special Packaging[M]. Amsterdam: The Pepin Press, 2004.