

5R 平面机构在不同装配、工作模式下的工作空间

刘伟

(西安工程大学, 西安 710048)

摘要: **目的** 研究 5R 并联机构工作空间在不同装配模式和工作模式下的工作空间, 对与 5R 平面机构类似的机构工作空间分析、路径规划等问题提供理论支持。**方法** 对约束方程求导, 得到运动学奇异矩阵。建立工作空间边界约束方程, 根据装配模式和工作模式的定义, 建立不等式约束方程。使用 Cylindrical Decomposition 对约束方程进行求解。结果 得到了 5R 并联机构工作空间在不同装配模式和工作模式下工作空间的图像, 装配模式“+—”对应的工作空间的并集为机构的可达工作空间, 根据装配模式和工作模式的组合, 可得到 8 种不同的工作空间。**结论** Cylindrical Decomposition 在解决工作空间问题方面有着一定的应用价值, 使用 Mathematica 对不等式组进行求解得到的结果较直观, 容易理解。

关键词: 装配模式; 工作模式; 工作空间

中图分类号: TB486; TH113.2⁺² **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2017)05-0058-05

Workspace of 5R Planar Mechanism in Different Assembly and Work Modes

LIU Wei

(Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

ABSTRACT: The work aims to study the workspace of 5R parallel mechanism in different assembly and working modes, and provide theoretical support for the workspace analysis and path planning of the mechanism similar to 5R planar mechanism. The singular matrix of kinematics was obtained by deriving the constraint equation. The workspace boundary constraint equations were established and the constraint inequations were built based on the definition of assembly and working modes. The workspace image of 5R parallel mechanism in different assembly and working modes was obtained. The union of the workspaces corresponding to assembly mode “+—” was the reachable workspace. According to the combination of assembly and working modes, eight different workspaces could be obtained. Cylindrical Decomposition in solving the problem of workspace has certain application value. The set of inequalities are solved with Mathematica, and the results are intuitive and easy to understand.

KEY WORDS: assembly mode; working mode; workspace

快递行业近年来发展速度迅猛, 目前市场上包装机械多定制流水线作业, 不适合小型电商使用^[1-2]。戴建生等提出并设计了可重构多指式糖果纸盒折叠机器人^[3-5], 将闭环五杆手指机构用于纸盒折叠。5R 平面并联机构是最简单的并联机构之一。工作空间是衡量并联机构性能的一个重要指标, 以工作空间作为机构优化设计指标也是常见的优化设计方法^[6]。由于工作空间内部存在奇异位形, 这些奇异位形把并联机构工作空间分割成若干部分, 如果要扩大并联机构的工作空间, 就要使并联机构通过相应的奇异位形, 存在失控和驱动力矩过大等一系列问题^[7], 因此许多学

者对并联机构的最大无奇异工作空间进行了许多研究^[8-9]。近年来, 一些学者对于一些特殊并联机构称为尖点并联机构进行了研究^[10], 这类机构可不通过奇异位形, 而在若干个机构正解对应姿态中进行变换, 从而扩大并联机构的工作空间。

5R 并联机构既可以作为独立的机器人本体结构, 如五杆双臂拾取钢珠机器人、五杆双臂 Dyna-M 型卧式加工中心、手指纸盒包装机器人, 也可以作为抓取并联机构的支链, 具有更为广阔的工程应用价值^[11]。侯志利等^[11-13]没有考虑 5R 并联机构如何扩展工作空间、减少工作空间中的奇异轨迹等问题。Damien

收稿日期: 2016-12-29

作者简介: 刘伟(1985—), 男, 硕士, 西安工程大学助教, 主要研究方向为并联包装机械设计。

Chablat 以 5R 平面并联机构为例, 使用 quadtree model 和区间分析法得到了 5R 机构不同装配模式和工作模式的工作空间和运动副工作空间^[14-15], 但是这种方法应用需要的软件许多学者并不熟悉, 在实际使用过程中存在一定难度。Caro S 介绍的 branch and prune 方法在求解工作空间^[16]、运动学分析、奇异分析问题方面取得了一定成果, 但这种方法在计算复杂问题时计算时间过长。Damien Chablat^[8]使用 Cylindrical Decomposition 分析了 2RPR-2PRR 工作空间和无奇异装配模式转变等问题, 但这种机构的工作空间与机构的工作模式无关, 相对简单。Jha R 使用 Cylindrical Decomposition 对 Delta 类并联机构工作空间和运动副工作空间进行了分析, 但需要使用 SIROPA library 进行求解, 这也对一般学者使用这一方法造成了一定困难^[17]。文中主要以 5R 并联机构为例研究不同装配模式和工作模式下对应机构的工作空间, 提出了求解这一问题的一般方法, 结合数学常用工具 Mathematica 的 Cylindrical Decomposition 对不等式约束方程组进行求解, 得到了与 MACHO E^[7]一致的分析结果。这种方法求解过程简单, 求解结果更容易理解, 不需要使用专用软件, 为解决复杂机构的工作空间分析、工作空间为优化设计指标的机构设计、路径规划等问题提供了一定支持。

1 基础知识

1.1 串、并联奇异

机构的位形是指组成机构的构件位置和姿态的集合, 例如: 5R 机构所有构件与 x 轴正向的夹角组成的向量, 对应 5R 机构的某个时刻的位形。5R 平面并联机构的模型见图 1, P 点作为动平台, 其输出为 P 的位置变量 $\mathbf{x}=(x,y)$, 杆 A_iB_i 是驱动构件, 相应的输入表示为杆 A_iB_i 与 x 轴正向的夹角 $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ 。杆 B_iP_i 是被动构件, 被动构件的输出表示为 $\mathbf{v}_i=(\theta_3,\theta_4)$ 。

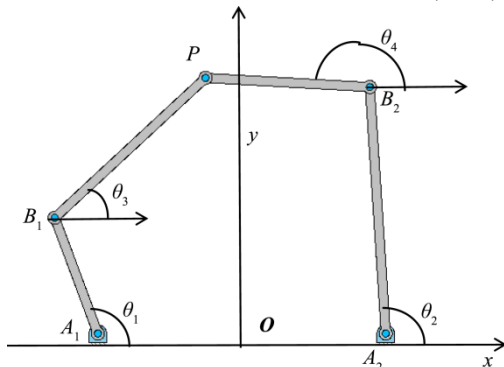


图1 5R 平面机构模型
Fig.1 The 5R planar mechanism model

一般来讲, 机构的位形由约束方程式(1)确定:

$$\varphi'(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_i) = 0 \quad (1)$$

式中: φ' 为位形约束函数; $\mathbf{x}$ 为输出构件(对应并联机构动平台)的位置、姿态组成的向量; θ 为输入构件(对应并联机构驱动构件)的位置或姿态组成的向量; $\mathbf{v}_i$ 为被动构件(对应并联机构除去驱动构件、动平台的构件)的位置、姿态组成的向量。

如果消去被动构件输出变量 $\{\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_i\}$, 得到简化后的机构位形方程:

$$\varphi(\mathbf{x}, \theta) = 0 \quad (2)$$

对式(2)关于时间 t 求导, 得到式(3)

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\theta} = 0 \quad (3)$$

式中: $\mathbf{A}$ 为并联奇异矩阵^[18], 由于当矩阵 $\mathbf{A}$ 降秩或者当 $\det\|\mathbf{A}\|=0$ 时, 机构位形处于奇异位形, 一般对应并联机构驱动副轴线相交、平行、共面等特殊情况, 因此称之为并联奇异。一般情况下, 机构处于并联奇异时, 机构失去控制, 因此机构处于并联奇异位形时十分危险, 一般应尽量避免发生。 $\mathbf{B}$ 为串联奇异矩阵, 由于当矩阵 $\mathbf{B}$ 降秩或者说当 $\det\|\mathbf{B}\|=0$ 时, 机构位形处于奇异位形, 一般对应并联机构分支中驱动副与被动运动副处于相交、平行、共面等特殊情况, 因此称为串联奇异。一般情况下, 机构处于串联奇异时, 对应机构动平台处于工作空间的边界位置, 此时发生串联奇异的分支驱动副会产生较大力矩, 并且机构动平台丧失部分自由度。

1.2 工作模式

并联机构在给定动平台输出 $\mathbf{x}$ 时, 与动平台的输出对应的若干个 $\{\theta, \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_i\}$ 称为机构的工作模式。也就是说, 机构的工作模式对应机构运动逆解, 机构有几个逆解, 就对应几种工作模式。工作模式变换轨迹对应两个不同的逆解变换的轨迹。在 CHABLAT D^[19] 完全并联机构的工作模式定义为: 对机构串联矩阵 $\mathbf{B}$ 来说, 当 $\det\|\mathbf{B}\| \neq 0$, $\mathbf{B}$ 的对角元素 B_{ii} 符号保持不变时, 对应的机构位形集合, 即:

$$WM_i = \{(\mathbf{x}, \theta \in W \cdot Q | \text{sign}(B_{jj}) = \text{constant} \& \det\|\mathbf{B}\| \neq 0, j=1 \cdots n)\} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{x}$ 为输出广义坐标向量; θ 为广义输入坐标向量; sign 为表达式的符号函数; B_{jj} 为矩阵 $\mathbf{B}$ 的对角元素; constant 表示 B_{jj} 的符号保持不变; $\det$ 表示行列式; 矩阵 $\mathbf{B}$ 为串联奇异矩阵; $W \cdot Q$ 为机构工作空间和运动副工作空间的笛卡尔积; n 为机构的自由度。

P 点位置一定时, 对应 5R 机构的 4 种工作模式及使用 GIM^[20] 仿真软件绘制的工作空间见图 2。

1.3 装配模式

与驱动副的输入 θ 对应的若干个 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_i)$ 称为机构的装配模式。也就是说, 机构的装配模式对应机构运动正解, 机构有几个正解, 就对应几种装配模式。历史上, 由于学者对机构进行运动分析研究时发现,

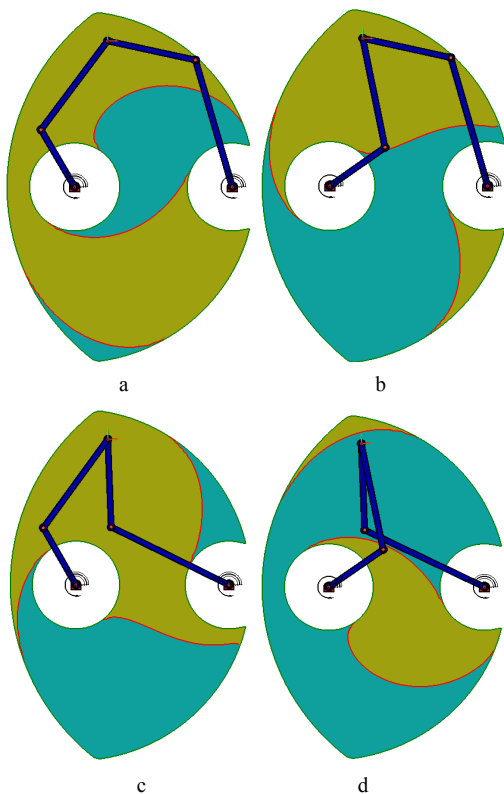


图2 5R平面机构的4种工作模式
Fig.2 Four work modes of 5R planar mechanism

要通过机构重新装配才能使机构的位形进行变换,因此把机构的运动学正解称为机构的装配模式。后来的一些研究表明并联机构的位形变换也可不通过对机构重新装配来实现,这一说法一直沿用至今。

例如图3中,动平台P点要实现图3中2种装配模式的变换,可以通过把机构拆解后重新装配实现,当然这种方法十分的麻烦。如果不通过重新对机构进行装配而实现图3中机构2种位形的变换,动平台P就要通过工作空间中的并联奇异轨迹,动平台存在失控的危险,但MACHO E^[7,21]提到也可以使用路径规划使得动平台实现位形变换通过并联奇异轨迹而不失控。

装配模式变换轨迹对应2个不同的正解变换的轨迹。图3给出了5R平面机构的2个位置正解对应

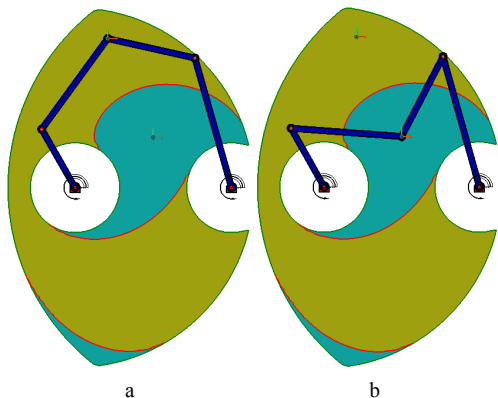


图3 5R机构2种装配模式
Fig.3 Two assembly modes of 5R planar mechanism

的位形,这2种位形对应2种装配模式。使用仿真软件GIM得到的仿真结果见图3,5R并联机构工作空间被线条分割开来,工作空间的边界是串联奇异轨迹组成的,把可达工作空间分割开来的线条为并联奇异轨迹。分割成的区域根据其位形对应的 $\det\|A\|$ 的符号,可表示为“-”装配模式,“+”装配模式。

2 工作空间求解方法

根据工作模式和装配模式的定义,可建立不等式组,不等式的解集就是不同工作模式和装配模式对应的工作空间。

1) 根据定义联立位形约束方程, $\det\|A\| > 0$, or, $\det\|A\| < 0$, $B_{ii} < 0$, or, $B_{ii} > 0$ 。

2) 由于1)得到的约束方程存在三角函数,使用 $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$, $t_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$ 表示 c_i , s_i :

$$c_i = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}, s_i = \frac{2t_i}{1+t_i^2} \quad (5)$$

3) 使用CAD(Cylindrical Decomposition)对不等式方程进行求解。最终画出相应装配模式和工作模式下的工作空间。在数学领域,CAD是一种算法,CAD是计算代数和实代数几何的基础。 S 是 R^n (R 表示实数域)上的多项式集合,CAD把集合 S 在 R^n 上进行分解,分解成为连通的半代数集合称为cell。半代数集合是在 R^n 上的不等式和等式构成的方程组。CAD得到连通cell上集合 S 的所有多项式都具有恒定的符号(+,-,0)。CAD一般需要满足以下条件:如果 $1 \leq k \leq n$, f 是从 R^n 到 R^{n-k} 上的映射,这个映射消去了最后的 k 个变量。对CAD得到的每个cell来说,满足条件:

$$f(c) = f(d) \text{ or } f(c) \cap f(d) = \emptyset \quad (6)$$

根据CAD的定义,以及工作、装配模式的定义,使用CAD对包含不等式的约束方程组在工作空间上进行分解。文中使用Wolfram Mathematica10.1中的函数Cylindrical Decomposition、Region Plot对不等式方程求解和对结果进行可视化表达。

3 举例说明

对5R并联机构不同的装配模式和工作模式进行分析。选取的5R机构参数与文献[7]中的相同,结构见图1, $A_1B_1=15$, $A_2B_2=30$, $B_1P=25$, $B_1P_2=20$, $A_1A_2=35$ 。先建立不等式约束方程:

$$\begin{aligned} (x-15c_1)^2 + (y-15s_1)^2 - 25^2 &= 0 \\ (x-35-30c_2)^2 + (y-30s_2)^2 - 20^2 &= 0 \\ \det\|A\| &= 4(x-15c_1)(y-30s_2) - 4(y-15s_1)(x-35-30c_2) \\ B_{11} &= 2(x-15c_1)(15s_1) + 2(y-15s_1)(-15c_1) \\ B_{22} &= 2(x-35-30c_2)(30c_2) + 2(y-30s_2)(-30c_2) \end{aligned} \quad (7)$$

使用 $t_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$ 表示 c_i, s_i 得到:

$$\begin{aligned} t_1^2 x^2 + t_1^2 y^2 + 30t_1^2 x - 400t_1^2 - 60t_1 y + x^2 + y^2 - 30x - 400 &= 0 \\ t_2^2 x^2 + t_2^2 y^2 - 10t_2^2 x - 375t_2^2 - 120t_2 y + x^2 + y^2 - 130x + 3825 &= 0 \\ \det\|A\| = 2t_1^2 t_2^2 y - 6t_1^2 t_2 x + 3t_1 t_2^2 x - 90t_1^2 t_2 + 8t_1^2 y - 15t_1 t_2^2 - t_2^2 y + & \\ 3t_1 x - 6t_2 x - 195t_1 + 90t_2 + 5y & \\ B_{11} = t_1^2 y + 2t_1 x - y & \\ B_{22} = t_2^2 y + 2t_2 x - 70t_2 - y & \end{aligned} \quad (10)$$

使用 Wolfram Mathematica10.1 中的函数 Cylindrical Decomposition、Region Plot^[22]对不等式方程求解和对结果进行可视化表达。Cylindrical Decomposition 是目前求解多项式不等式的常用方法,在 Mathematica10.1 给出了求解不等式的例子。

Input:CylindricalDecomposition[$x^2 + y^2 < 1 \& y > x, \{x, y\}$]

Out: $\left(-1 < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \& -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}\right) \parallel$
 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \& x < y < \sqrt{1-x^2}\right)$

不等式结果为 2 个集合的并集,集合 $\left(-1 < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}\right)$ 用图 4 的左侧区域表示,集合 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, x < y < \sqrt{1-x^2}\right)$ 用右侧区域表示,结果见图 4。这 2 个集合,也可称为不等式解的区域,在 Cylindrical Decomposition 一般称为 2 个 cell。

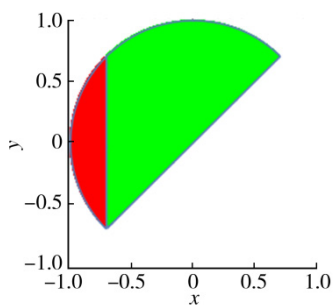


图 4 Cylindrical Decomposition 计算图例
Fig.4 Calculation example of Cylindrical Decomposition

使用 Cylindrical Decomposition 解决不同装配模式和工作模式组成的不等式,计算结果见图 5—8。由于具体的计算结果比较冗长,这里只给出了解的图示。

$\det\|A\| > 0, B_{11} > 0, B_{22} > 0 \rightarrow (+|+,+)$, 42 个 cell, 即 42 个解的区间。 $\det\|A\| < 0, B_{11} > 0, B_{22} > 0 \rightarrow (-|+,+)$, 32 个 cell, 即 32 个解的区间。

$\det\|A\| < 0, B_{11} > 0, B_{22} < 0 \rightarrow (-|+,-)$, 39 个 cell, 即 39 个解的区间。 $\det\|A\| > 0, B_{11} > 0, B_{22} < 0 \rightarrow (+|+,-)$, 46 个 cell, 即 46 个解的区间。

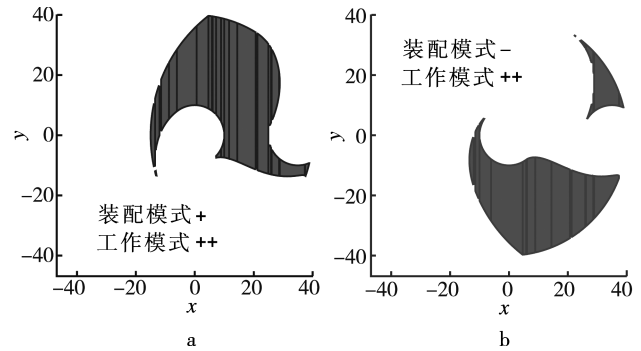


图 5 工作模式++、装配模式+的 5R 平面机构的工作空间
Fig.5 Work space of 5R planar mechanism in ++ work mode and +- assembly mode

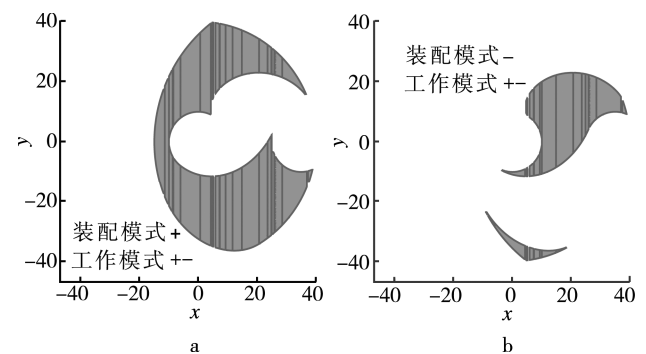


图 6 工作模式+-、装配模式+的 5R 平面机构的工作空间
Fig.6 Work space of 5R planar mechanism in +- work mode and +- assembly mode

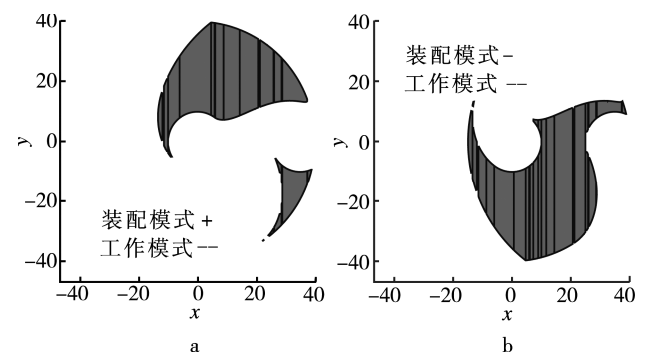


图 7 工作模式--、装配模式+的 5R 平面机构的工作空间
Fig.7 Work space of --work mode in different assembly modes and +- assembly mode

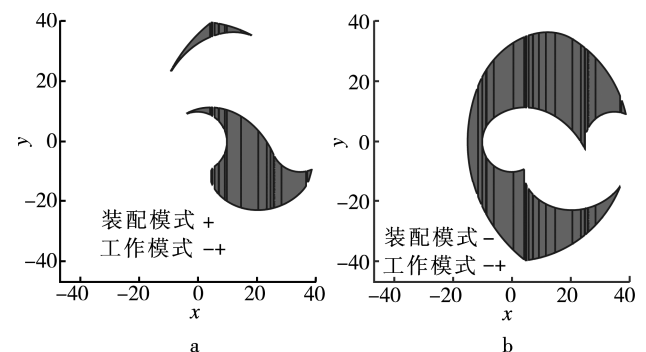


图 8 工作模式-+, 装配模式+-的 5R 平面机构的工作空间

Fig.8 Work space of 5R planar mechanism in -+ work mode and +- assembly modes

$\det\|A\| > 0, B_{11} < 0, B_{22} < 0 \rightarrow (+|-,-)$, 32 个 cell, 即 32 个解的区间。 $\det\|A\| < 0, B_{11} < 0, B_{22} < 0 \rightarrow (-|-,-)$, 43 个 cell, 即 43 个解的区间。

$\det\|A\| > 0, B_{11} < 0, B_{22} > 0 \rightarrow (+|-,+)$, 39 个 cell, 即 39 个解的区间。 $\det\|A\| < 0, B_{11} < 0, B_{22} > 0 \rightarrow (-|-,+)$, 45 个 cell, 即 45 个解的区间。

上述结果与 MACHO E^[7]结果一致,不同的地方在于工作模式的定义。文中使用 B_{ii} 的符号来定义工作模式。从结果来看,5R 并联机构在不同的装配模式、工作模式下工作空间有 4 种形状。同一工作模式在装配模式(+,-)下的工作空间的并集构成可达工作空间。

4 结语

提出了对 5R 并联机构不同工作模式、装配模式工作空间求解的方法。比现有文献介绍的方法求解过程要简单,并且不等式组解的结果也更直观,更容易掌握和理解。以 5R 并联机构为例分析了不同装配模式和工作模式下的工作空间,即无奇异工作空间,结果与 MACHO E^[7]中的结果一致。为具有与 5R 类似特点的并联机构工作空间分析、路径规划提供了方便、实用的方法。

参考文献:

- [1] 孙西卓,冯小平,贾同飞,等.一种自动化包装装置:中国,201210309131.9[P].2015-02-18.
SUN Xi-zhuo, FENG Xiao-ping, JIA Tong-fei, et al. An Automatic Packaging Device: China, 201210309131.9[P]. 2015-02-18.
- [2] 李丽阁,张有良,段移丽,等.纸箱包装机纸板取送机构的设计与研究[J].包装与食品机械,2014,32(4):28—30.
LI Li-ge, ZHANG You-liang, DUAN Yi-li, et al. Design and Research of the Sucking and Delivery Mechanism for the Carton Packing Machine[J]. Packaging and Food Machinery, 2014, 32(4): 28—30.
- [3] FERDINANDO C, DAI J S. Origami-Carton Tuck-in with a Reconfigurable Linkage[C]// ASME/IFTOMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots, London, UK, 2009: 512—520.
- [4] YAO W, DAI J S. A Reconfigurable Robotic Folding System for Confectionery Industry[J]. Industrial Robot, 2010, 37(6): 542—551.
- [5] YAO W, CANNELLA F, DAI J S. Automatic Folding of Cartons Using a Reconfigurable Robotic System[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2011, 27(3): 604—613.
- [6] CHABLAT D, MOROZ G, ARAKELIAN V, et al. Solution Regions in the Parameter Space of a 3-RRR Decoupled Robot for a Prescribed Workspace[J]. Latest Advances in Robot Kinematics Springer Netherlands, 2012: 1—8.
- [7] MACHO E, ALTUZARRA O, PINTO C, et al. Workspaces Associated to Assembly Modes of the 5R Planar Parallel Manipulator[J]. Robotica, 2008, 26(3): 395—403.
- [8] CHABLAT D, MOROZ G, WENGER P. Uniqueness Domains and Non Singular Assembly Mode Changing Trajectories[C]// Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on IEEE, 2011: 3946—3951.
- [9] CHABLAT D, JHA R, ROUILLIER F, et al. Non-singular Assembly Mode Changing Trajectories in the Workspace for the 3-RPS Parallel Robot[M]. Advances in Robot Kinematics: Springer International Publishing, 2014.
- [10] COSTE M, WENGER P, CHABLAT D. Hidden Cusps[C]// 15th International Symposium on Advances in Robot Kinematics, Grasse, France, 2016.
- [11] 侯志利,武文革,李瑞琴,等.可控 5R 平面并联机构构型重构设计与实验研究[J].机械传动,2016(9):56—60.
HOU Zhi-li, WU Wen-ge, LI Rui-qin, et al. Configuration Design and Experimental Research of a Controllable 5R Planar Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Drive, 2016(9): 56—60.
- [12] 孟宪举,张策.平面五杆机构的尺度分析[J].机械科学与技术,2003,22(2):238—240.
MENG Xian-ju, ZHANG Ce. The Scale of the Planar Five-bar Mechanism Analysis[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2003, 22 (2) : 238—240.
- [13] 李仁军,刘宏昭,李鹏飞.混合输入机构实现给定轨迹的模糊控制[J].农业机械学报,2009,40(3):199—202.
LI Ren-jun, LIU Hong-zhao, LI Peng-fei. Hybrid Input Mechanism to Realize the Fuzzy Control of a Given Trajectory[J]. Journal of Agricultural Machinery, 2009, 40(3): 199—202.
- [14] CHABLAT D. Joint Space and Workspace Analysis of a Two-DOF Closed-chain Manipulator[J]. Cism International Centre for Mechanical Sciences, 2010, 524: 81—90.
- [15] CHABLAT D, WENGER P. Working Modes and Aspects in Fully Parallel Manipulators[J]. 1998, 3: 1964—1969.
- [16] CARO S, CHABLAT D, GOLDSZTEJN A, et al. A Branch and Prune Algorithm for the Computation of Generalized Aspects of Parallel Robots[J]. Artificial Intelligence, 2012, 211(1): 867—882.
- [17] CHABLAT D, JHA R, ROUILLIER F, et al. Non-singular Assembly Mode Changing Trajectories in the Workspace for the 3-RPS Parallel Robot[J]. Advances in Robot Kinematics, 2014: 149—159.
- [18] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains[J]. IEEE Transactions on Robotics & Automation, 1990, 6(3): 281—290.
- [19] CHABLAT D, WENGER P. Moveability and Collision Analysis for Fully-Parallel Manipulators[J]. Romansy, 2007: 61—68.
- [20] PETUYA V, MACHO E, ALTUZARRA O, et al. Educational Software Tools for the Kinematic Analysis of Mechanisms[J]. Computer Applications in Engineering Education, 2014, 22(1): 72—86.
- [21] BRIOT S, ARAKELIAN V. On the Dynamic Properties of Flexible Parallel Manipulators in the Presence of Payload and Type 2 Singularities[C]// ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American Society of Mechanical Engineers, 2010: 1475—1481.
- [22] STRZEBONSKI A. Solving Algebraic Inequalities[J]. Mathematica Journal, 1999, 7: 525—541.