

基于 Study 参数分析 Delta 机构运动约束

刘伟

(西安工程大学, 西安 710048)

摘要: **目的** 研究 Delta 并联机构分支数目和驱动副分布对机构运动约束的影响。**方法** 使用 Study 参数表示刚体的位移、姿态变换矩阵, 根据运动链 D-H 参数, 建立运动链约束方程, 再进行坐标变换得到分支约束方程, 分析驱动副分布对 Delta 类并联机构运动约束的影响。**结果** 分支数目为 3 和 4 时, 驱动副无论如何分布, delta 并联机构只具有移动的运动特征。**结论** 用统一的表达式来表示 Delta 并联机构的约束情况更为直观, 也为 Delta 并联机构设计优化提供了新的思路。

关键词: study 参数; 驱动副分布; Delta; 运动约束

中图分类号: TH113.2⁺2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2017)09-0183-05

Analysis of Kinematic Constraints of Delta Mechanism Based on Study Parameters

LIU Wei

(Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

ABSTRACT: The work aims to study the number of branches of Delta parallel mechanism and the influence of driven joint distribution on the kinematic constraints of mechanism. Study parameters were used to represent the displacement and attitude transformation matrix of a rigid body. According to the D-H parameters of kinematic chain, constraint equations of kinematic chain were established, and then the branch constraint equations through coordinate transformation were obtained. The effect of driven joint distribution on the kinematic constraints of Delta parallel mechanism was analyzed. When the branch number was 3 and 4, no matter how the driven joint was distributed, the delta parallel mechanism was only characterized by movement. The unified expression used to indicate the constraining conditions of Delta parallel mechanism is more intuitive, and provides a new idea for its optimized design.

KEY WORDS: study parameters; driven joint distribution; Delta; kinematic constraint

并联机构相对于串联机构, 具有刚度大、精度高、动态性能好的特点。过去的几十年, 学者对并联机构的设计理论进行了大量的研究, 取得了丰硕的研究成果^[1-6]。Delta 并联机构就是并联机构研究成果在工业应用方面最成功的例子之一。Delta 并联机构的主要特点是可以快速的进行位置的变换, 在工业生产方面例如包装物流中的装箱、分拣等方面应用潜力巨大。随着国外 Delta 并联机构专利到期, 国内 Delta 并联机构设计制造也掀起了一波高潮。

关于 Delta 并联机构的理论研究非常多, 运动学分析更是一个比较老的话题。20 世纪 90 年代就得到了逆解的封闭解^[7-8], 旋量方法^[9-10], 数值模拟仿真软件^[11], 不同的运动约束方程建模方法都能得到满意的 Delta 并联机构的运动学分析结果, 但是据作者所

知, 可以使用旋量等方法确定 Delta 机构的自由度和自由度的类型, 运动学分析建立在 Delta 并联机构只能进行三维移动的认识基础之上, 然而, 根据 Delta 并联机构的支链结构, 对支链数目和支链驱动副在定平台上的分布进行运动学分析的研究较少。

1 Study 参数表示刚体的位移位姿

Study 参数^[12-14]是由 8 个参数 $[x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3]$ 组成, 也可把 Study 参数看做满足条件 (1) 的对偶四元数:

$$\begin{aligned} x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 &= 0 \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &\neq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

对偶四元数表示刚体位姿变换时不存在表达奇

收稿日期: 2016-09-08

作者简介: 刘伟(1985—), 男, 硕士, 西安工程大学助教, 主要研究方向为并联包装机械设计。

异。式中: a_H 为对偶四元数; a_0 和 a_1 为四元数。

$$a_H = a_0 + \varepsilon a_1, \varepsilon^2 = 0 \quad (2)$$

对偶四元数的基本元素为 $1, i, j, k, \varepsilon i, \varepsilon j, \varepsilon k$ 。对偶四元数可表示为

$$\begin{aligned} P_H &= X + \varepsilon Y \\ &= (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) + \varepsilon(y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k) \\ &= (x_0 + \varepsilon y_0) + (x_1 + \varepsilon y_1) i + (x_2 + \varepsilon y_2) j + (x_3 + \varepsilon y_3) k \end{aligned} \quad (3)$$

对偶四元数的共轭表示为:

$$\tilde{P}_H = (x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k) + \varepsilon(y_0 - y_1 i - y_2 j - y_3 k) \quad (4)$$

对偶四元数表示为 $P=1+\varepsilon(xi+yj+zk)$ 表示三维空间的一个点 (x, y, z) , 一般情况下, 刚体位姿变换由 $P_e p \tilde{P}_H$ 表示, $P_e = X - \varepsilon Y$ 。

$$\begin{aligned} AdP(r) &= (X - \varepsilon Y)(1 + \varepsilon r)(\tilde{X} + \varepsilon \tilde{Y}) \\ &= 1 + \varepsilon(Xr\tilde{X} + X\tilde{Y} - Y\tilde{X}) \\ &= 1 + \varepsilon \tilde{r} \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $Xr\tilde{X}$ 为向量 r 的位姿变换的转动部分; $X\tilde{Y} - Y\tilde{X}$ 为 r 的位姿变换的移动部分。移动部分可由式(6)计算:

$$\begin{aligned} X\tilde{Y} - Y\tilde{X} &= 2(-x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_3 + x_3 y_2) i + \\ &2(-x_0 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_0 - x_3 y_1) j + \\ &2(-x_0 y_3 - x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0) k \end{aligned} \quad (6)$$

由此可得到相应的变换矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l & x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2(x_1 x_2 - x_0 x_3) & 2(x_1 x_3 + x_0 x_2) \\ m & 2(x_1 x_2 + x_0 x_3) & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2(x_2 x_3 - x_0 x_1) \\ n & 2(x_1 x_3 - x_0 x_2) & 2(x_2 x_3 + x_0 x_1) & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中: $l=2(-x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_3 + x_3 y_2)$, $m=2(-x_0 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_0 + x_3 y_1)$, $n=2(-x_0 y_3 - x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0)$ 。式(7)矩阵满足式(1)就可以表示刚体的位姿变换:

$${}^0 T_1 = \begin{bmatrix} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^0 P_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^0 R_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中: ${}^0 T_1$ 为 4×4 的矩阵, 表示局部坐标系转换到固定坐标系的变换矩阵; ${}^0 R_1$, ${}^0 P_1$ 分别为坐标变换对应的姿态变换矩阵和位移矩阵; $\mathbf{0}$ 为 1×3 的零行向量。

$${}^0 R_1 = \begin{pmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2(x_1 x_2 - x_0 x_3) & 2(x_1 x_3 - x_0 x_2) \\ 2(x_1 x_2 + x_0 x_3) & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2(x_2 x_3 - x_0 x_1) \\ 2(x_1 x_3 - x_0 x_2) & 2(x_2 x_3 + x_0 x_1) & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$${}^0 P_1 = \begin{bmatrix} 2(-x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_3 + x_3 y_2) \\ 2(-x_0 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_0 + x_3 y_1) \\ 2(-x_0 y_3 - x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

把变换矩阵 ${}^0 T_1$ 中的元素对应表示为 T_{ij} , 可由式求解对应的 Study 参数, $X=(x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3)$

与 T_{ij} 的关系由式 (11) — (12) 表示。

$$\begin{aligned} x_0 : x_1 : x_2 : x_3 \\ &= (T_{00} + T_{11} + T_{22} + T_{33}) : (T_{23} - T_{32}) : (T_{31} - T_{13}) : (T_{12} - T_{21}) \\ &= (T_{23} - T_{32}) : (T_{00} + T_{11} - T_{22} - T_{33}) : (T_{12} + T_{21}) : (T_{31} + T_{13}) \\ &= (T_{31} - T_{13}) : (T_{12} + T_{21}) : (T_{00} - T_{11} + T_{22} - T_{33}) : (T_{23} + T_{31}) \\ &= (T_{12} - T_{21}) : (T_{31} + T_{13}) : (T_{23} + T_{32}) : (T_{00} - T_{11} - T_{22} + T_{33}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} 2T_{00}y_0 &= x_1 T_{10} + x_2 T_{20} + x_3 T_{30}, \\ 2T_{00}y_1 &= -x_0 T_{10} + x_3 T_{20} - x_2 T_{30}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$2T_{00}y_2 = -x_3 T_{10} - x_0 T_{20} + x_1 T_{30},$$

$$2T_{00}y_3 = x_2 T_{10} - x_1 T_{20} - x_0 T_{30}$$

通过增加方程 $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 可以把 Study 参数变换矩阵规范化。通过使用 Study 参数, 机构运动约束方程可以完全用代数式进行表达, 避免了使用变换矩阵带来的问题, 这样做的好处是, 对机器人运动特性的分析可以转化为, 对其对应的运动特征代数方程的研究。

2 Study 参数运动链建模方法

1) 根据并联机构运动链运动副类型、结构参数, 结合 D-H 坐标写出动平台位姿变换矩阵, 即:

$$D = M_1 \cdot G_1 \cdot M_2 \cdot G_2 \cdots M_n \cdot G_n \quad (13)$$

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(u_i) & -\sin(u_i) & 0 \\ 0 & \sin(u_i) & \cos(u_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ d_i & 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{pmatrix} \quad (15)$$

式中: u_i 为转动副 i 绕 z_i 转过的角度; a_i 为坐标轴系 $x_{i+1}o_{i+1}y_{i+1}$ 沿 x_{i+1} 的位移; d_i 为坐标轴系 $x_{i+1}o_{i+1}y_{i+1}$ 沿 z_{i+1} 的位移; α_i 是坐标系 $x_{i+1}o_{i+1}y_{i+1}$ 沿 x_i 轴转动后, z_i 轴与 z_{i+1} 的夹角。

2) 根据 1) 得到的表达式 D , 根据 Study 参数与刚体位姿变换矩阵的转换方法, 得到:

$$\begin{aligned} x_0 &= f_0(t), x_1 = f_1(t), x_2 = f_2(t), x_3 = f_3(t), \\ y_0 &= f_4(t), y_1 = f_5(t), y_2 = f_6(t), y_3 = f_7(t) \end{aligned} \quad (16)$$

式中: t 为运动链关节(转动副、移动副)变量、结构参数(D-H 参数)。

3) 由 2) 得到的参数方程, 采用消元法, 消去被动运动链关节变量, 即可得到运动链位形方程。这是运动学分析的关键步骤, 使用消元法时, 由于机构结构的复杂性, 有时这种方法不一定合适。另外一种解运动链位形方程的方法是通过待定系数法来进行求解的。值得注意的是, 并联机构一般有多个运动链, 当运动链结构相同时, 不同运动链在固定坐标系的空间位置不同, 因此也可以在得到一个运动链位形方程

之后, 对其进行坐标系变换, 以此方法得到所有的位形约束方程, 大大简化了运动建模的计算过程。下面简单介绍这一方法, 一般来讲, 上述建模方法建模得到的位形方程具有以下 2 种形式, 一种是线性方程, 另外一种是二次型方程。

线性方程为:

$$U^T X = 0 \quad (17)$$

式中: $X = (x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3)^T$ 。考虑到坐标变换的一般形式为 $D_1 X D_2$, 则上述方程可以转变为:

$$U^T D_1 X D_2 = 0 \quad (18)$$

式 (18) 可转变为:

$$\begin{aligned} U^T D_1 D_2' X' &= 0 \\ (D_1 D_2')^T U^T X' &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$U'^T X' = 0$$

$$U'^T = (D_1 D_2')^T U^T$$

接下来考虑二次型方程, 一般情况下二次型方程具有以下形式:

$$X D X^T = 0 \quad (20)$$

同理, 也可以进行坐标系转变得到方程 $X' D' X'^T = 0$ 。一般的运动链约束方程可以通过上述方法进行坐标系变换得到相应驱动副位置下的运动支链的约束方程。

3 不同分支数目、驱动副分布对 Delta 并联机构运动的影响

Delta 并联机构结构见图 1, 由基座 $A_1 A_2 A_3$ 三角形定平台, 与其固结的坐标系是 $O-xyz$, O 为基座的坐标系原点, $C_1 C_2 C_3$ 为三角型动平台, 与其固结的坐标系是 $P-x'y'z'$ 坐标, 原点为 P 。定平台与基座之间由 3 条支链相连, 每条支链由 4 个球副 $C_i^1 C_i^2 B_i^1 B_i^2$ (C_i^1, B_i^1 分别代表与转动副轴线 C_i, B_i 共线的 2 个球副) 组成的平行四边形机构和与其相连的连杆 $A_i B_i$ 组成。

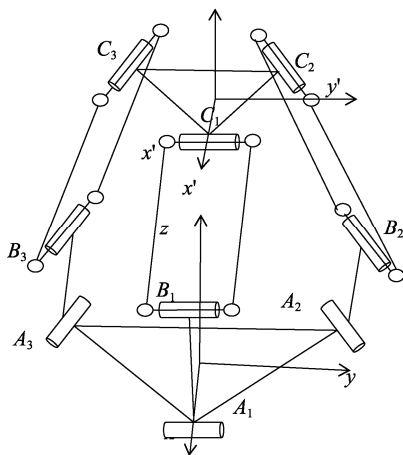


图 1 Delta 并联机构运动模型简图

Fig.1 Sketch of kinematic model of Delta parallel mechanism

由于 Delta 并联机构分支与 RUU 型(R 转动副, U 万向节)支链运动学等价, 因此可以通过研究与 Delta 分支结构参数对应的 RUU 支链, 建立 delta 并联机构支链约束方程。

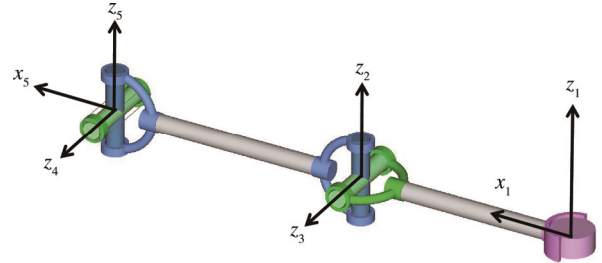


图 2 Delta 并联机构分支等效运动链 RUU 模型
Fig.2 RUU model of equivalent kinematic chain of Delta parallel mechanism branch

3.1 RUU 分支运动链的运动方程建立

分支运动链 DH 坐标见表 1。DH 坐标下的坐标变换矩阵可以表示为绕 z_i 轴的转动, 再沿 z_{i+1}, x_{i+1} 轴的移动, 伴随沿 x_{i+1} 的转动合成得到。

表 1 Delta 支链 D-H 参数
Tab.1 D-H parameters of Delta branched chain

i	a_i	d_i	$\alpha_i / (^\circ)$	v_i
1	a_1	0	0	v_1
2	0	0	90	v_2
3	a_3	0	0	v_3
4	0	0	-90	$-v_3$
5	0	0	0	v_5

绕 z_i 轴转动的变换矩阵表示为 M_i , 沿 x_i 轴的转动, 伴随沿 z_{i+1}, x_{i+1} 的轴的移动得到的变换矩阵表示为 G_i 。

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v_i & -\sin v_i & 0 \\ 0 & \sin v_i & \cos v_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$G_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ d_i & 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (22)$$

式中: a_i, d_i 为新坐标系 $x_{i+1}y_{i+1}O_{i+1}$ 相对于坐标系 $x_iy_iO_i$ 沿 x_{i+1}, z_{i+1} 的位移, 以 x_{i+1}, z_{i+1} 的正向为正, 以初位置移动到末位置的矢量分量表示; α_i 为新坐标系 $x_{i+1}y_{i+1}O_{i+1}$ 相对于坐标系 $x_iy_iO_i$ 沿 x_i 的转角, 以从末位置转向初为置的角度, x_i 正向为正方向。一般情况下, 与杆件固联的坐标系假定 i 是初位姿, $i+1$ 是末位姿。 z_i 一般沿着杆件 i 的转动轴线方向, x_{i+1} 沿着 z_i, z_{i+1} 的公垂线方向, 从 z_i 指向 z_{i+1} , y_i 的方向根据右手定则确定。

$$M_1 G_1 M_2 G_2 M_3 G_3 M_3^{-1} G_4 M_5 = A \quad (23)$$

根据 Study 参数建模方法得到式 (24)。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2(v_3^2+1))(v_1v_2+v_1v_4+v_2v_4-1) \\ 0 \\ 0 \\ -(2(v_3^2+1))(v_1v_2v_4-v_1-v_2-v_4) \\ -2a_3v_3(v_1v_2v_4-v_1-v_2-v_4) \\ l \\ k \\ 2a_3v_3(v_1v_2+v_1v_4+v_2v_4-1) \end{pmatrix}$$

$$l = (-v_1v_2 - v_1v_4 + v_2v_4 - 1)(v_3^2 + 1)a_1 -$$

$$a_3(v_1v_2 - v_1v_4 - v_2v_4 - 1)(v_3^2 - 1)$$

$$k = (v_1v_2v_4 - v_1 + v_2 + v_4)(v_3^2 + 1)a_1 +$$

$$a_3(v_1v_2v_4 + v_1 + v_2 - v_4)(v_3^2 - 1)$$

使用待定系数法得到相应的约束方程^[9]:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ (v_1^2 + 1)(a_1^2 - a_3^2)(x_0^2 + x_3^2) \\ &+ 4a_1(1 - v_1^2)(x_0y_1 - x_3y_2) + \\ &8a_1v_1(x_0y_2 + x_3y_1) + \\ (v_1^2 + 1)(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

以动平台几何中心为坐标原点的动坐标系,在定平台坐标系中的变换方程为:

$$\mathbf{M}(\alpha)\mathbf{G}(r_1, 0, 90)\mathbf{A}\mathbf{G}(r_2, 0, 90)\mathbf{M}(\pi - \alpha) = \mathbf{A}_i \quad (26)$$

式中: α 为分支绕 z_0 转动的角度; r_1 为定平台的外接圆半径; r_2 为动平台的外接圆半径。矩阵 $\mathbf{M}$, $\mathbf{G}$ 中的正弦、余弦值可用其对应的半角正切值替换。

3.2 分支的约束方程

由变换得到分支的约束方程为:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\alpha)\mathbf{G}(r_1, 0, 90)\mathbf{A}\mathbf{G}(r_2, 0, 90)\mathbf{M}(180 - \alpha) &= \mathbf{A}_i \\ \mathbf{G}_m(r_2, 0, 90)\mathbf{M}_m(180 - \alpha)\mathbf{M}_b(\alpha)\mathbf{G}_b(r_1, 0, 90)\mathbf{A}_b &= \mathbf{A}_{ib} \\ \mathbf{B}_b = \mathbf{G}_m(r_2, 0, 90)\mathbf{M}_m(180 - \alpha)\mathbf{M}_b(\alpha)\mathbf{G}_b(r_1, 0, 90) \\ \mathbf{B}_b\mathbf{A}_b &= \mathbf{A}_{ib} \end{aligned} \quad (27)$$

式中: $\mathbf{M}$, $\mathbf{G}$ 为 4×4 矩阵; $\mathbf{M}_b$, $\mathbf{M}_m$, $\mathbf{G}_b$, $\mathbf{G}_m$, $\mathbf{B}_b$, $\mathbf{A}_b$, $\mathbf{A}_{ib}$ 为 8×8 矩阵^[14]。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{U}_2 &= [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (28)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 & J_3 & -J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_4 & 0 & 0 & 0 \\ J_2 & 0 & 0 & J_3 & 0 & J_4 & 0 & 0 \\ J_3 & 0 & 0 & -J_2 & 0 & 0 & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= (u_1 + 1)(a_1^2 - a_3^2) \\ J_2 &= 2a_1(1 - u_1^2) \\ J_3 &= 4a_1u_1 \\ J_4 &= 4(u_1^2 + 1) \end{aligned} \quad (30)$$

经过变换得,化简得到关于 x_1, x_2, x_3 关于的约束方程:

$$\begin{aligned} rf_i x_3 &= 0 \\ x_1 rf_i^2 - 2x_2 rf_i - x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

式中: rf_i 为分支转角半角正切。由于式(31)是关于 Delta 分支结构转角约束的一般形式,因此可以进行分支数为 2, 3, 4 的 Delta 并联机构关于转角自由度的一般分析。

3.3 分支数目、驱动副分布位置对 Delta 并联机构约束的影响

当有 2 个分支时, $x_3=0$, x_1, x_2 相关,此时机构具有一个旋转自由度。当有 3 个分支时, $x_1=0, x_2=0, x_3=0$, 此时机构不具旋转的自由度。当有 4 个分支时, $x_1=0, x_2=0, x_3=0$, 此时机构不具旋转的自由度。

4 结语

Study 参数根据机构 D-H 参数对机构进行运动学建模是一种有特色建模方法,得到的约束方程保留了机构运动特征方面的所有信息。虽然求解分支运动链的约束方程过程有点复杂,但是很容易通过坐标变换在分支结构相同、分支数目不同、分布位置不同的并联机构分析中应用,这一建模方法值得在一些并联机构的分析中进行使用。

通过分析,可以很清楚地发现,当 Delta 机构具有 3 个分支时,无论分支如何分布,只要驱动副轴线的垂线相交于定平台中心,那么 Delta 并联机构不具有转动自由度,只能进行移动。文中对于 2, 3, 4 运动链分支,不同的驱动副分布的 Delta 并联机构分析提供了简洁的结果,为 Delta 类并联机构设计、分析提供了新的思路。

参考文献:

- [1] WALTER D R, HUSTY M L, PFURNER M, et al. The SNU 3-UPU Parallel Robot from a Theoretical Viewpoint[C]// Proceedings of the Second International Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, Montpellier France, 2008.
- [2] HUSTY M L, PFURNER M, SCHRÖCKER H P. A New and Efficient Algorithm for the Inverse Kinematics of a General Serial 6 R Manipulator[J]. Mechanism & Machine Theory, 2005, 42(1): 66—81.

- [3] HUSTY M L, KARGER A. Self-motions of Griffis-Duffy Type Parallel Manipulators[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2000 Proceedings ICRA IEEE, 2000: 7—12.
- [4] HUSTY M L. Non-singular Assembly Mode Change in 3-RPR-parallel Manipulators[M]. Computational Kinematics: Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [5] WALTER D R, HUSTY M L, PFURNER M. A Complete Kinematic Analysis of the SNU 3-UPU Parallel Robot[J]. Interactions of Classical & Numerical Algebraic Geometry, 2008: 331—346.
- [6] SCHADLBAUER J, HUSTY M L, CARO S, et al. Self-motions of 3-RPS Manipulators[J]. Frontiers of Mechanical Engineering, 2013, 8(1): 62—69.
- [7] PIERROT F, FOURNIER C R A. Delta: a Simple and Efficient Parallel Robot[J]. Robotica, 1990, 8(2): 105—109.
- [8] TSAI L W, STAMPER R E. A Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of Freedom[C]// ASME Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference Irvine Paper Detc2000/mech, 1997.
- [9] PFURNER M. Analysis of a Delta Like Parallel Mechanism with an Over Constrained Serial Chain as Platform[C]// The, Iftomm World Congress, 2015: 1336—1342.
- [10] GALLARDO-ALVARADO J, BALMACEDA-SANTAMARÍA A L, CASTILLO-CASTANEDA E. An Application of Screw Theory to the Kinematic Analysis of a Delta-type Robot[J]. Journal of Mechanical Science & Technology, 2014, 28(9): 3785—3792.
- [11] PEIDRÓ A, GIL A, MARÍN J M, et al. A Web-based Tool to Analyze the Kinematics and Singularities of Parallel Robots[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2015, 81(1): 1—19.
- [12] HUSTY M L, KARGER A. Self-motions of Griffis-Duffy Type Parallel Manipulators[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2000 Proceedings ICRA IEEE, 2000: 7—12.
- [13] HUSTY M L. Algebraic Methods in Mechanism Analysis and Synthesis[J]. Robotica, 2007, 25(6): 661—675.
- [14] PFURNER M. Analysis of Spatial Serial Manipulators Using Kinematic Mapping[D]. University Innsbruck, 2006.
- [15] PFURNER M. Analysis of a Delta Like Parallel Mechanism with an Over Constrained Serial Chain as Platform[C]// The, Iftomm World Congress, 2015: 1336—1342.