

缓冲与隔振

弹性圆环冲击弹性柱的碰撞回弹行为研究

杨玉亮, 王永, 黄志龙
(浙江大学, 杭州 310027)

摘要: **目的** 研究弹性薄壁圆环低速冲击理想弹性柱的碰撞回弹行为。**方法** 实验方面, 使用高速数码显微系统记录铜环冲击3种不同橡胶柱的碰撞相互作用的全过程。理论方面, 应用模态叠加法和拉格朗日方程法导出圆环约束运动阶段和自由运动阶段的运动控制方程, 并建立2组方程间的迭代关系, 据此描述碰撞相互作用的全过程。**结果** 碰撞次数随着刚度比的增大而增加, 无量纲回弹时间和恢复系数随着刚度比的增大而减小。多次碰撞的临界刚度比随着圆环厚径比的增大而增大。**结论** 理论方法成功预测了弹性薄壁圆环低速冲击理想弹性柱的碰撞回弹行为, 可为防撞结构的几何与材料参数选择, 以及实验模态分析中的锤头选择提供理论指导。

关键词: 弹性圆环; 碰撞回弹; 弹性柱; 多次碰撞; 恢复系数

中图分类号: O326 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2018)15-0001-05

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2018.15.001

Collision and Rebound Behavior of Elastic Circular Ring Impinging on Elastic Column

YANG Yu-liang, WANG Yong, HUANG Zhi-long
(Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

ABSTRACT: The work aims to investigate the collision and rebound behaviors of elastic thin-wall circular ring with low velocity impinging on ideal elastic column. In experimental tests, a high-speed digital microscope system was used to record the whole process of collision interaction of brass ring impinging on three kinds of elastic columns. In theoretical aspect, the modal superposition method and Lagrange equation method were applied to derive the governing equations of motion for the constrained motion stage and the free motion stage of the circular ring, respectively. The iterative relationship between the two sets of equations was then established, from which the whole process of collision interaction was described. The number of collisions increased and the non-dimensional rebounding time and coefficient of restitution decreased as the stiffness ratio increased. The critical stiffness ratio of multiple collisions increased with the increase of the thickness-radius ratio of the circular ring. The theoretical method successfully predicts the collision and rebound behaviors of elastic thin-wall circular ring with low velocity impinging on elastic column and can provide some theoretical guidance on the selection of geometric and material parameters in anti-collision structure and the selection of hammer head in experimental modal analysis.

KEY WORDS: elastic circular ring; collision and rebound; elastic column; multiple collisions; coefficient of restitution

圆环作为一种基本的结构件, 具有质量轻、能量吸收性好的特点, 在缓冲隔振以及防护工程领域有着广泛的应用。在公路上一些事故多发的“交通黑点”, 例如分岔口和急转弯处安装的碰撞衰减系统^[1-2], 利用圆环阵列缓冲隔振的特点, 显著减少了碰撞的危

害。一种保护桥墩抵御船舶撞击的环形防撞结构也得到了广泛研究^[3-5], 重点讨论了圆环刚度与地基刚度比值, 以及地基黏性等参数对圆环-地基系统变形模式的影响。此外, 环状紧固件能够通过施加预应力来加强主结构的强度和刚度。为了评估防护性能并指导

收稿日期: 2018-03-19

基金项目: 国家自然科学基金(11472240, 11532011, 11621062)

作者简介: 杨玉亮(1991—), 男, 浙江大学硕士生, 主攻振动理论及冲击动力学。

通信作者: 黄志龙(1965—), 男, 浙江大学教授、博导, 主要研究方向为随机动力学与控制。

结构设计,更深入地理解冲击过程中的能量耗散行为,以及冲击体与被冲击体之间能量再分配过程具有重要的意义。

早期,关于圆环及其他类似结构件的研究,主要针对准静态挤压状态下的塑性行为^[6-11]。圆管受一对刚性板准静态挤压时,在不同情形下分别出现四铰和六铰失效模式^[6-7]。准静态下,受径向集中力的圆环在受压和受拉时也会出现四铰和六铰失效模式^[9-10]。与准静态情形相比,圆环的动态冲击问题要复杂得多^[11-16]。通过有限元模拟和实验观察,弹塑性圆环冲击刚性壁的碰撞相互作用也被广泛研究^[11-12]。弹塑性圆环变形模式复杂,恢复系数受初始冲击速度的影响很大,甚至会出现远小于1的情况。

近期研究发现,在冲击的相互作用过程中,弹性结构件之间会出现多次碰撞现象^[17-18]。当乒乓球以较高的初速度冲击刚性壁面时,接触区域发生弹性屈曲,此时在界面处发生多次碰撞,恢复系数急剧减小^[17]。为了深入探讨弹性振动对多次碰撞及恢复系数的影响,离散质量-弹簧系统的碰撞过程得到了详细研究^[19-20]。研究发现,质量块相对于质心的运动可占据系统机械能的一大部分,恢复系数最小可达到0.178。此外,平直弹性杆和梁冲击理想无质量弹簧的碰撞回弹行为也已经得到了系统的研究^[18],揭示了弹性构件和理想弹簧之间复杂的碰撞相互作用。所有的研究均表明,结构件的弹性振动会导致恢复系数的显著减小。

文中研究弹性薄壁圆环低速冲击理想弹性柱体的碰撞相互作用的全过程,试图回答以下2个问题:是否会发生多次碰撞现象;是否会出现恢复系数较小的情况。首先,搭建实验平台,观察铜环冲击3种不同橡胶柱的碰撞相互作用全过程,然后,建立理论方法解释实验中所观察到的现象。

1 实验观察

1.1 材料准备与平台搭建

在实验中,圆环由H65黄铜条弯曲焊接而成,见图1a。铜环几何尺寸为:中面半径 $R=200\text{ mm}$,壁厚 $h=2\text{ mm}$,宽度 $b=4\text{ mm}$ 。材料参数为:弹性模量 $E=90\text{ GPa}$,密度 $\rho=8740\text{ kg/m}^3$ 。在实验中,3个弹性柱分别由EPDM泡沫橡胶、高弹橡胶及天然橡胶3种材料制成,几何尺寸一致,底面半径为 4.25 mm ,高度为 12.00 mm ,见图1b。3种弹性柱的刚度系数通过压缩试验测得。测量时,在沿轴向压缩弹性柱的同时,记录压缩过程中轴向位移和相应的压力。通过最小二乘法对垂向位移与压力的关系曲线进行线性拟合,所得拟合曲线的斜率即弹性柱的刚度系数。3个弹性柱的刚度系数测量值分别为1890,8086,30241 N/m。

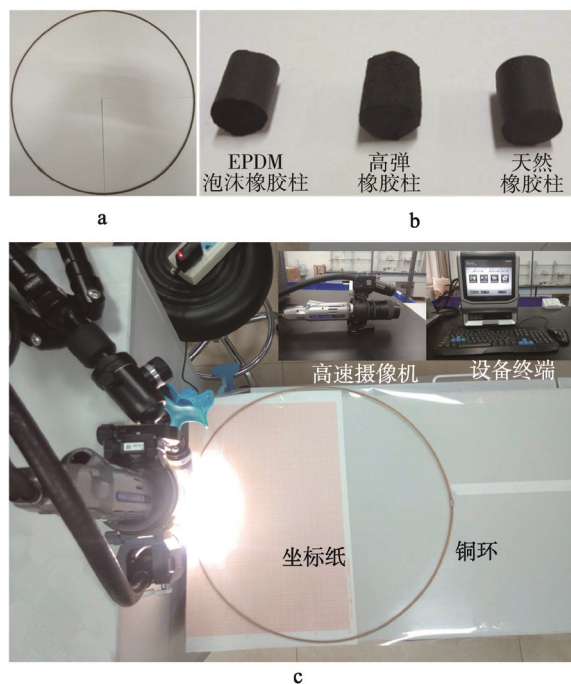


图1 实验材料准备及实验平台

Fig.1 Preparation of test specimens and experimental platform

圆环自由地放置于近似光滑的水平桌面上,弹性柱的一端固定在与光滑桌面垂直的另一个平面上。在实验时,铜环以初速度 $v_0=1.02\text{ m/s}$ 垂直冲击弹性柱。铜环的初速度根据放置于背景的坐标纸测出,坐标线之间的间隔为 1 mm 。采用Keyence-VW-9000E高速数码显微系统记录圆环与弹性柱的碰撞相互作用的全过程,其快门速度为 $1/3000\text{ s}$,帧速率为 $1000/\text{s}$,实验平台见图1c。由于显微系统视野的限制,很难测出铜环的回弹速度,故无法计算其恢复系数,因此,在实验中仅关注在接触区域的多次碰撞现象。

1.2 实验结果

铜环与EPDM泡沫橡胶柱、高弹橡胶柱以及天然橡胶柱的碰撞过程截图见图2,当铜环第1次接触弹性柱时开始计时。可以看出,在铜环冲击EPDM泡沫橡胶柱的整个过程中,弹性柱一直保持压缩状态,因此仅发生1次碰撞,一旦铜环离开,将不会再发生接触;在铜环冲击高弹橡胶柱的过程中, $t=19.8\text{ ms}$ 时两者第1次分离,然后在 $t=22.8\text{ ms}$ 时再次接触,最终在 $t=43.2\text{ ms}$ 时第2次分离,且不再发生接触;铜环冲击天然橡胶柱时也有同样的现象出现。也就是说,第1组实验仅出现1次碰撞,而后2组实验均出现了多次碰撞。上述3组实验的回弹时间分别为45.0,43.2和42.0 ms,而3种橡胶柱的刚度系数是依次增大的,因此推测弹性柱刚度越大,越容易出现多次碰撞,而回弹时间随着弹性柱刚度的增大而减小。

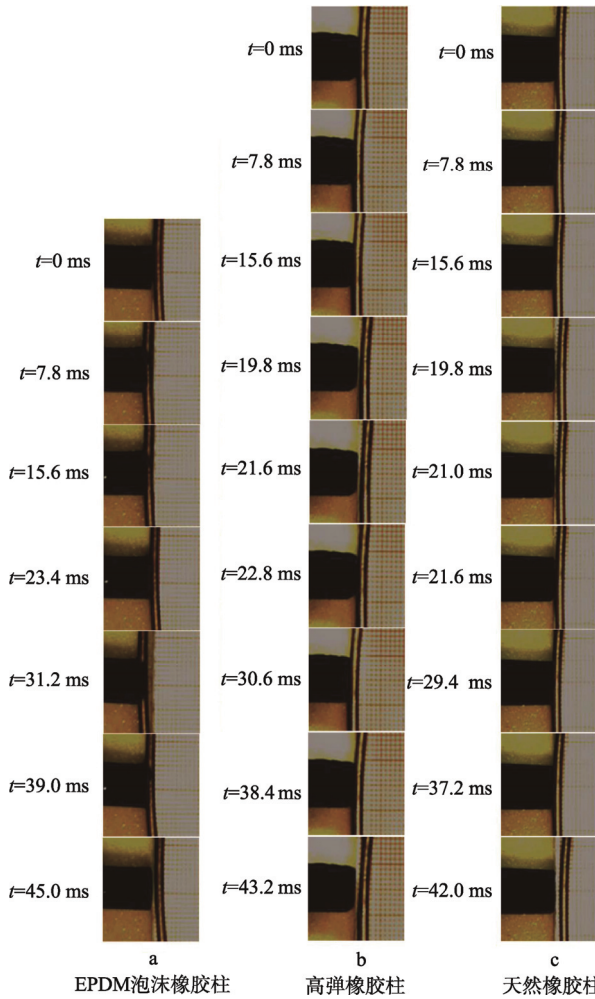


图 2 铜环与 3 种弹性柱的碰撞过程中不同瞬时的视频截图
Fig.2 Screenshots at different instants for collision processes of brass ring with three elastic columns

2 理论分析

2.1 问题描述与模型建立

这里建立预测弹性薄壁圆环冲击弹性柱的碰撞回弹行为的解析方法。研究多次碰撞现象的物理机制，重点探讨碰撞次数、回弹时间以及恢复系数对圆环和弹性柱几何及材料参数的依赖关系。对于低速冲击情形，碰撞相互作用不会激起圆环的高阶模态振动。此外，材料的内阻也会抑制圆环的高频率振动。由此，圆环运动过程可近似由刚体运动加上几个低阶模态振动来表示。文中仅保留了前三阶模态振型。

取圆环与弹性柱接触瞬时圆环中心 C 所在的空间点 O 位置为原点，建立直角坐标系 $O-xy$ ，其中坐标轴 x 沿弹性柱轴线方向，坐标轴 y 垂直于弹性柱轴线。同时，在圆环中心 C 建立随体平移参考系，并在参考系上放置极坐标系，角度 θ 从坐标轴 x 开始逆时针度量。平移参考系中的相对位移表征圆环的变形，圆环中面任意一点的法向位移 w 可表示为：

$$w(\theta, t) = q_2(t)\cos(2\theta) + q_3(t)\cos(3\theta) + q_4(t)\cos(4\theta) \quad (1)$$

式中： $\cos(2\theta)$ ， $\cos(3\theta)$ ， $\cos(4\theta)$ 分别为圆环一阶、二阶和三阶模态振型； $q_2(t)$ ， $q_3(t)$ ， $q_4(t)$ 为相应的模态坐标。假设圆环中面的环向应变为 0，即 $\partial v / \partial \beta + w/R = 0$ ，其中 R 为圆环中面半径， β 为放置于圆环中面的环向坐标。圆环中面任意一点的切向位移 v 可由主坐标表示，进而求得圆环上任一点的环向应变。圆环中总的应变能可以表示为：

$$V_1 = \frac{2\pi E b h^3}{3R^3} q_2(t)^2 + \frac{27\pi E b h^3}{8R^3} q_3(t)^2 + \frac{32\pi E b h^3}{3R^3} q_4(t)^2 \quad (2)$$

在直角坐标系中，圆环中面任意一点沿 x 轴和 y 轴方向的位移可分别表示为 $u_x(\theta, t) = q_1(t) + w(\theta, t)\cos\theta - v(\theta, t)\sin\theta$ ， $u_y(\theta, t) = w(\theta, t)\sin\theta + v(\theta, t)\cos\theta$ 。进而求得圆环的动能为：

$$T = \pi \rho R h b \left(\dot{q}_1^2 + \frac{5}{8} \dot{q}_2^2 + \frac{5}{9} \dot{q}_3^2 + \frac{17}{32} \dot{q}_4^2 \right) \quad (3)$$

弹性柱的压缩量由接触点的位移，即 $u_x(0, t)$ 决定，因此弹性柱储存的势能可以表示为：

$$V_2 = \frac{1}{2} k (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)^2 \quad (4)$$

当圆环与弹性柱接触时，圆环的运动受到约束，称此时圆环处于约束运动阶段。相反地，当圆环与弹性柱分离时，称此时圆环处于自由运动阶段。在碰撞相互作用的全过程中，圆环将会交替地经历这 2 个阶段。

圆环约束运动阶段的无量纲控制方程可以由拉格朗日法得到：

$$\ddot{\tilde{q}}_1 + \frac{1}{2} \pi \tilde{k} (\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3 + \tilde{q}_4) = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{\tilde{q}}_i + \frac{\tilde{t}^6}{12(\tilde{t}^2 + 1)} \pi^2 \tilde{h}^2 \tilde{q}_i + \frac{\tilde{t}^2}{\tilde{t}^2 + 1} \pi \tilde{k} (\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3 + \tilde{q}_4) = 0 \quad (6)$$

式中： $\tilde{q}_i$ 为无量纲模态坐标， $\tilde{q}_i = q_i/R$ ； $\tilde{t}$ 为无量纲时间， $\tilde{t} = c/(\pi R)t$ ，其中， c 为圆环材料的波速， $c = \sqrt{E/\rho}$ ； $\tilde{k}$ 为弹性柱刚度与圆环刚度的比值， $\tilde{k} = k/(E h b/R)$ ； $\tilde{h}$ 为圆环壁厚与圆环中面半径的比值， $\tilde{h} = h/R$ 。在自由运动阶段，弹性柱的势能不包含在拉格朗日函数中。由此，自由运动阶段圆环的无量纲运动控制方程可以直接通过舍去含有刚度比的 $\tilde{k}$ 项得到。

圆环刚接触弹性柱时，圆环的速度为 v_0 ，此时圆环还未发生变形。由此，圆环运动的初始条件可以表示为：

$$\tilde{q}_i(0) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \dot{\tilde{q}}_1(0) = \tilde{v}_0, \quad \dot{\tilde{q}}_j(0) = 0 \quad j = 2, 3, 4 \quad (7)$$

式中: $\tilde{v}_0$ 为无量纲初速度, $\tilde{v}_0 = v_0 \pi / c$ 。

约束运动阶段的无量纲控制方程、自由运动阶段的无量纲控制方程以及运动初始条件共同构成一个有定解的初值问题。

在分析中, 未考虑弹性柱的质量, 即忽略了弹性柱惯性对碰撞的影响, 因此整个碰撞过程相当于圆环冲击理想弹簧。另外, 由于冲击相互作用轻微, 圆环变形较小, 可认为圆环在冲击过程中不发生局部凹陷。由此, 圆环是否与弹性柱接触只需判断圆环中面 $\theta=0$ 的点是否与弹性柱接触即可。若 $u_x(0, \tilde{t}) > 0$, 圆环与弹性柱接触; 反之, 若 $u_x(0, \tilde{t}) < 0$, 圆环与弹性柱分离。由此, 约束运动阶段和自由运动阶段之间的切换条件为 $u_x(0, \tilde{t}) = 0$, 即 $\tilde{q}_1(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_3(\tilde{t}) + \tilde{q}_4(\tilde{t}) = 0$ 。式(7)是第1个运动阶段的初始条件, 后续运动阶段的初始条件通过位移和速度连续性条件由上一个运动阶段的终止状态确定。在自由运动阶段, 如果切换条件不再成立, 也就是圆环与弹性柱不再接触, 那么这次自由运动阶段开始时的时间就是无量纲回弹时间, 记为 $\tilde{t}^*$, 圆环进入约束运动阶段的次数为碰撞次数。由于圆环与弹性柱完全分离, 所以圆环将不受任何干扰地自由运动, 因此, 圆环的无量纲回弹速度等于圆环刚体运动的速度在最后分离时刻的值, 即 $\dot{\tilde{q}}_1(\tilde{t}^*)$ 。采用运动学恢复系数 $|\dot{\tilde{q}}_1(\tilde{t}^*)|/\tilde{v}_0$ 来评估圆环与弹性柱碰撞过程中的全局能量损失。严格来说, 对于多次碰撞的情况, 应该针对每次碰撞定义不同的恢复系数, 即恢复系数应该为第 n 次碰撞的分离速度与第 n 次碰撞的冲击速度的比值, 但可认为每次碰撞的恢复系数并不重要, 因此, 定义恢复系数为最后1次碰撞的分离速度与初始冲击速度的比值, 这样可以更直接地表征全局的能量损失。

运用隆格库塔法对约束运动阶段的无量纲控制方程和自由运动阶段的无量纲控制方程进行连续迭代计算, 可以得到圆环与弹性柱冲击相互作用的全过程。仔细观察约束运动阶段、自由运动阶段无量纲控制方程及初始条件可以看出, 主坐标的时域响应与刚度比 $\tilde{k}$ 、厚径比 $\tilde{h}$ 以及无量纲初速度 $\tilde{v}_0$ 有关, 但由于整个过程是一个线性定解问题, 所以碰撞次数、无量纲回弹时间以及恢复系数仅依赖于刚度比 $\tilde{k}$ 和厚径比 $\tilde{h}$, 而与无量纲初速度 $\tilde{v}_0$ 无关。

2.2 理论结果及与实验对比

在实验中, 铜环的厚径比 $\tilde{h} = 0.01$, EPDM泡沫橡胶柱、高弹橡胶柱以及天然橡胶柱的刚度与铜环刚度的比值分别为 5.25×10^{-4} , 2.246×10^{-3} , 8.4×10^{-3} 。碰撞次数和无量纲回弹时间随刚度比 $\tilde{k}$ 变化的关系见图3, 其中离散点表示实验结果。总体上, 碰撞次数随刚度比的增大而增加, 而无量纲回弹时间随刚度比的增大而减小。理论分析方法可以定性地预测碰撞

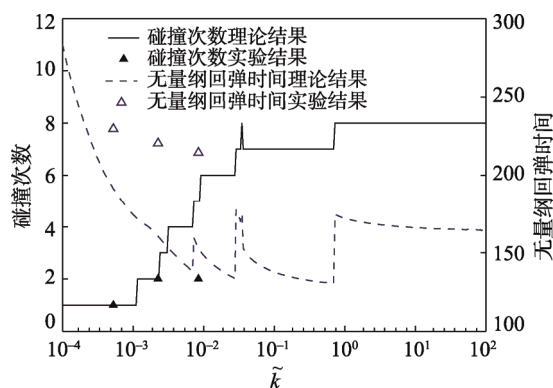


图3 碰撞次数和无量纲回弹时间随刚度比变化的关系

Fig.3 The dependences of number of collision and non-dimensional rebounding time on the stiffness ratio

次数和无量纲回弹时间的变化趋势, 实验和理论之间的误差主要由2个原因造成: 理论上, 随着所取刚度比的增大, 就会有更多的高阶模态振动被激发, 引起更复杂的多次碰撞现象, 而在实验中, 一些细微的分离过程很难被捕获到, 因此理论预测的碰撞次数要比实验观察到的多; 理论上, 圆环与弹性柱的接触是点接触, 而在实验中圆环与弹性柱之间是面接触, 当圆环与整个接触面完全分离时才判定1次碰撞结束, 因此理论分析低估了实验中的碰撞时间。

恢复系数随刚度比 $\tilde{k}$ 变化的关系见图4。总体上, 恢复系数随刚度比的增大而减小。在刚度比较大时, 恢复系数维持在0.70~0.75范围内。当刚度比接近一个临界值 $\tilde{k}_c = 1.15 \times 10^{-3}$ 时, 出现多次碰撞。当刚度比超过这个临界值时, 恢复系数急剧减小, 碰撞次数变化时的刚度比恰好与无量纲回弹时间、恢复系数变化趋势发生转换时的刚度比相吻合。临界刚度比 $\tilde{k}_c$ 对圆环厚径比 $\tilde{h}$ 的依赖关系见图5。总体上, 临界刚度比随着厚径比的增大而增大, 由此可以在给定圆环和弹性柱的几何及材料参数时预测是否会发生多次碰撞。

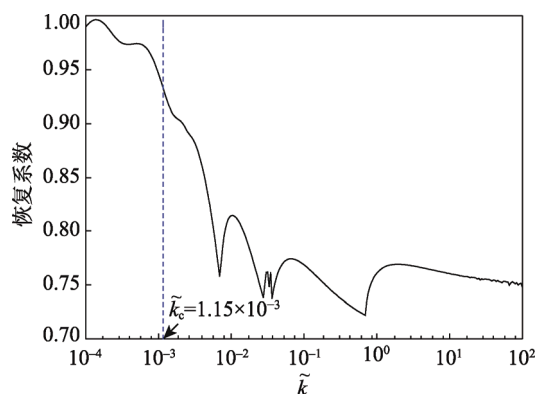


图4 恢复系数随刚度比变化的关系

Fig.4 The dependence of coefficient of restitution on the stiffness ratio

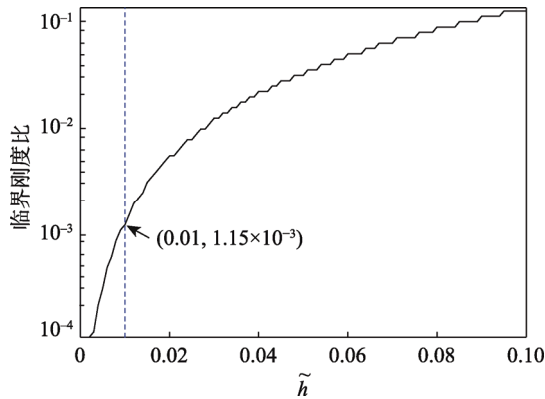


图5 临界刚度比随厚度比变化的关系

Fig.5 The dependence of the critical stiffness ratio on thickness-radius ratio

3 结语

通过实验及理论方法研究了弹性薄壁圆环低速冲击弹性柱的碰撞回弹行为。薄壁结构刚度低,在受到冲击时会产生剧烈的振动,部分能量会由平动自由度转移到振动自由度,因此造成恢复系数大幅度减小。碰撞次数、无量纲回弹时间以及恢复系数仅依赖于刚度比 $\tilde{k}$ 和厚径比 $\tilde{h}$,而与初始冲击速度无关。文中的工作将为防撞性设计中几何及材料参数的选择,以及实验模态分析中锤头的选择提供理论指导。

参考文献:

- [1] JONES N, WIERZBICKI T. Structural Crashworthiness and Failure: Proceedings of the Third International Symposium on Structural Crashworthiness[M]. Boca Raton: CRC Press, 2010.
- [2] CARNEY J F, AUSTIN C D, REID S R. Energy Dissipation Characteristics of Steel Tube Clusters[C]// Twenty-third Structures, Structural Dynamic and Materials Conference. New Orleans, 1982.
- [3] WANG Li-li, YANG Li-ming, HUANG De-jin, et al. An Impact Dynamics Analysis on a New Crashworthy Device against Ship-bridge Collision[J]. International Journal of Impact Engineering, 2008, 35: 895—904.
- [4] 郭丽娜, 唐长刚, 周风华, 等. 桥墩柔性防撞装置的静态等效弹性系数[J]. 宁波大学学报, 2010, 23(2): 114—120.
GUO Li-na, TANG Chang-gang, ZHOU Feng-hua, et al. Effective Stiffness of a Crashworthy Device for Ship-pile Collision Cushion[J]. Journal of Ningbo University, 2010, 23(2): 114—120.
- [5] ZHOU Feng-hua, YU Tong-xi, YANG Li-ming. Elastic Behavior of Ring-on-foundation[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2012, 54: 38—47.
- [6] DERUNTZ J A, HODGE P G. Crushing of a Tube between Rigid Plates[J]. Journal of Applied Mechanics, 1963, 30: 391—395.
- [7] MORRIS E, OLABI A G, HASHMI M S J. Lateral Crushing of Circular and Non-circular Tube Systems under Quasi-static Conditions[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2007, 191: 132—135.
- [8] REDDY T Y, REID S R. Lateral Compression of Tubes and Tube-systems with Side Constraints[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1979, 21: 187—199.
- [9] 余同希. 对径受拉圆环的塑性大变形[J]. 力学学报, 1979, 15(1): 95—98.
YU Tong-xi. Finite Plastic Deformation of a Ring Pulled Diametrically[J]. Acta Mechanica Sinica, 1979, 15(1): 95—98.
- [10] LU Guo-xing, YU Tong-xi. Energy Absorption of Structures and Materials[M]. Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [11] BAO Rong-hao, YU Tong-xi. Impact and Rebound of an Elastic-plastic Ring on a Rigid Target[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, 91: 55—63.
- [12] XU Shang-qing, RUAN Dong, LU Guo-xing, et al. Collision and Rebounding of Circular Rings on Rigid Target[J]. International Journal of Impact Engineering, 2015, 79: 14—21.
- [13] SILVA-GOMES J F, AL-HASSANI S T S, JOHNSON W. The Plastic Extension of a Chain of Rings Due to an Axial Impact Load[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1978, 20: 529—538.
- [14] REID S R, BELL W W, BARR R A. Structural Plastic Shock Model for One-dimensional Ring Systems[J]. International Journal of Impact Engineering, 1983, 1: 175—191.
- [15] WU X H, PARKER R G. Vibration of Rings on a General Elastic Foundation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 295: 194—213.
- [16] SHIM V P W, LAN R, GUO Y B, et al. Elastic Wave Propagation in Cellular Systems-experiments on Single Rings and Ring Systems[J]. International Journal of Impact Engineering, 2007, 34: 1565—1584.
- [17] BAO Rong-hao, YU Tong-xi. Collision and Rebound of Ping Pong Balls on a Rigid Target[J]. Materials & Design, 2015, 87: 278—286.
- [18] WANG Song, WANG Yong, HUANG Zhi-long, et al. Dynamic Behavior of Elastic Bars and Beams Impinging on Ideal Springs[J]. Journal of Applied Mechanics, 2016, 83: 031002.
- [19] RUAN Hai-hui, YU Tong-xi. Collision between Mass-spring Systems[J]. International Journal of Impact Engineering, 2005, 31: 267—288.
- [20] RUAN Hai-hui, YU Tong-xi. The Unexpectedly Small Coefficient of Restitution of a Two-degree-of-freedom Mass-spring System and Its Implications[J]. International Journal of Impact Engineering, 2016, 88: 1—11.