

三维紧致化存储系统中出入口位置的优化研究

吴应强, 童泽平, 任亮

(武汉科技大学 恒大管理学院, 武汉 430065)

摘要: **目的** 解决三维紧凑型存储系统的设计问题, 寻求系统出入口的最佳位置。**方法** 建立数学模型, 并优化求解, 研究自动化仓储系统出入口位置的设计问题。**结果** 在双命令存储模式下, 当三维紧致化仓储系统的系统出入口位置在货架底端 1/2 位置时, 双命令行程期望时间最少。**结论** 通过假设出入口的位置, 列出共计 24 种双命令下存取货物的期望时间模型, 并进行了求导分析, 发现在双命令存储模式下系统出入口最优点即为货架底端中点处。

关键词: 自动化存储系统; 双命令存储; 系统出入口

中图分类号: TP273; TP29 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2018)19-0117-07

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2018.19.021

Optimization of I/O Point in 3D Compact Storage System

WU Ying-qiang, TONG Ze-ping, REN Liang

(School of Evergrande Management, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China)

ABSTRACT: The work aims to solve the design problem of the 3D compact storage system and seek the best position to enter and exit the system. Mathematical models were established and the solutions were optimized to study the design issues of the entrance and exit position of the automatic storage system. In the dual-command storage mode, the expected time of dual-command travel was the least when the entrance and exit position of the 3D compact storage system was at the midpoint of the bottom of the shelf. Based on the assumptions on the entrance and exit position, a total of 24 expected time models for delivering and accessing the goods under dual commands are listed, and the derivation and analysis are conducted to find out that the optimal input/output point of the system in the dual-command storage mode is the midpoint of the bottom of the shelf.

KEY WORDS: automatic storage system; dual-command storage; input/output point of the system

我国物流行业发展突飞猛进,同时也带动了仓储行业的快速发展, Berg 等^[1]认为自动化仓储系统(AS/RS)作为现代化仓储系统的新科技成果,被广泛应用于处理大型仓库、配送中心以及制造工厂的库存货物。Lee 等^[2]认为一个完整的自动仓储系统包括一个多层的仓储货架、一个或者多个堆垛机(S/R machine)和一个或多个系统出入口(I/O point)。S/R 机器自动执行活动,以便将存货物品存入/取出存储机架的位置;I/O 点用于保存要存储和拣取的库存项目。在自动化仓储系统中使用多层货架可以有效提高

企业对现有空间的利用率,提高系统存储效率。Sarker 等^[3]认为自动化仓储系统效率主要由仓储系统的设计和存取策略来决定。近年来,随着土地价格的上涨,对于更高存储密度以及空间利用率、更快客户反应时间以及更低运营成本的要求越来越高,企业仓储的占地面积必须合理规划才能控制成本。Gue 等^[4]认为三维紧凑型存储系统在实践中被认为更符合企业的需求,因为三维紧致化仓储系统可以利用多层的仓储货架,从而提高现有空间利用率,并增加存储的密度,同时也可降低企业的人工成本。Zaerpour 等^[5]认为尽

收稿日期: 2018-06-11

基金项目: 湖北省教育厅科学技术研究项目(Q20171104)

作者简介: 吴应强(1995—),男,武汉科技大学硕士生,主攻仓储优化。

通信作者: 童泽平(1976—),男,博士,武汉科技大学副教授,主要研究方向为物流优化、管理决策。

管三维紧致型存储系统的发展已经极大地影响了现有库存管理、物料处理和仓库设计的实践,但这些系统的设计、分析和操作研究仍然滞后。De Koster 等^[6]研究了随机存储策略下三维紧致化系统的系统尺寸,认为最优的系统三维尺寸比例为 $0.72 : 0.72 : 1$ 。Yu 等^[7]从仓储区域边界的角度出发,用 PPR-SL 启发式算法去研究三维紧致化仓储系统的优化方案。同时 Yu 等^[8]又从单位货物的存取的算法上进行三维紧致化仓储系统的单元存储和拣取的测序启发式确定的研究。这些研究都具有一个相同的特征,即系统出入口位于仓储货架的左下角,但是,位于左侧角落的系统出入口可能无助于实现三维紧致化存储系统的最佳性能。Bozer 等^[9]认为系统出入口的位置对 S/R 机器存储或拣取库存物品所需的平均行程时间有重要影响,通常称为系统预期行程时间。Roodbergen 等^[10]认为系统预期的行程时间又会影响系统吞吐量,所以系统出入口的位置同样会影响系统吞吐量,所以系统出入口位置的优化设计对自动化仓储系统来说是十分必要的。沈古文^[11]对倍深式货架自动化立体仓库和三维紧致化仓储系统分别做了研究,认为采用双梭机能显著提升前者的运作效率,针对后者则得出该系统在特定假设条件下的运行时间模型,并运用在实际操作层面上。刘兵兵^[12]等指出未来仓储的发展方向是结合物联网技术,这是仓储系统发展的新风口。郝晶晶^[13]通过建立单命令预期行程时间的方式,对单命令预期行程时间公式做出了 24 种时间推导,对仓储系统出入口在底端位置进行优化,最后通过证明发现三维紧致化仓储系统的仓储货架底端中点位置为系统的最优系统出入口位置。

文中在郝晶晶等研究的基础上进行改进和完善,在原本单命令存储模式的情况下改进成双命令的存储模式,因为在实际的存储过程中,并不是单一的储存货物或者拣取货物,通常情况下存储货物和拣取货物是伴随发生的,这就是双命令的存储模式。为了确定系统出入口的最佳位置,在研究中,将考虑所有可能的情况,包括系统出入口位于中点和其他位置。根据系统出入口位置的变化,行程时间表达式的推导变得更加复杂,总之,研究集中在双命令存储模式下系统预期行程时间的推导上,并确定系统出入口的位置,从而可以导出最佳的系统出入口位置。

1 问题假设与模型建立

1.1 问题假设

文中主要研究配备电力传送带的自动化仓储系统,见图 1。该系统包括一个多层的仓储货架、一个堆垛机(S/R machine)和一个系统出入口(I/O point),根据 Bozer 等和 Ashayeri 等^[14]的研究基础做出如下普

遍应用在自动化仓储系统研究中的假设,堆垛架(S/R machine)在水平方向和垂直方向上以恒定速度移动,因此到达货架上任何位置的系统行程时间必须近似服从切比雪夫定律,并且货架被认为有一个连续的矩形拣选面,I/O 点在多层货架底端的左下角。除了这 2 个常用的假设,文中还为系统行程时间模型做出了如下一些特殊的假设:传送带在运送货物负载时,是不受堆垛机影响的。堆垛机以双命令为基础运行,并且不允许在通道中多次停靠;存储空间的数量、传送带的速度以及堆垛机在水平和垂直方向的速度是已知的。在系统中运用随机存储,即拾取面到任何点都有可能被选择用于存储和拣取。

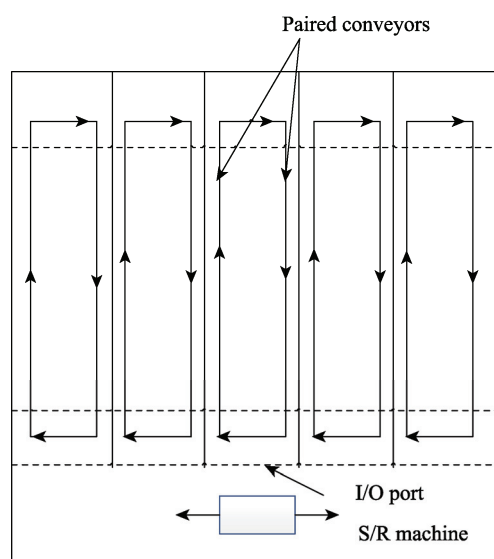


图 1 三维紧致化系统的构成(俯视图)

Fig.1 The composition of the 3D compact system (top view)

假设在一次双命令模式下进行货物的存储和拣取,堆垛机首先从 I/O 点负载到达一个存储点(记为 (X_1, Y_1, Z_1)),存储结束后到达下一个拣取点进行装载(记为 (X_2, Y_2, Z_2)),最后再返回 I/O 点完成这一次循环。在实际生活中,一个循环往往结合了存储和拣取。

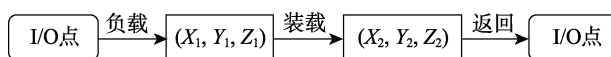


图 2 双命令存储模式下的一次存储和拣取的循环

Fig.2 One-time storage and picking cycle in dual-command storage mode

1.2 模型建立

1.2.1 数学符号说明

L 为三维紧致化仓储系统中多层仓储货架的长度; H 为三维紧致化仓储系统中多层仓储货架的高

度; S 为一条传送带的长度; v_c 为回路传送带的速度; v_h 为存取机器运行时水平方向的移动速度; v_v 为存取机器运行时垂直方向的移动速度; $a=L/v_h$ 为三维紧致化仓储系统中多层仓储货架的长度 (时间单位); $b=L/v_v$ 为三维紧致化仓储系统中多层仓储货架的高度 (时间单位); $c=(2 \times S)/v_c$ 为内 (外) 传送带的长度 (时间单位); t_w 为存货去程所需时间; t_U 为取货回程所需时间; t_0 为堆垛机在拣取点拾起货物和在存储点放下货物的时间; t_D 为堆垛机从存储点到另一个拣取点的行程时间; t_H 为等待时间, 即如果传送带运输货物的时间 t_R 大于堆垛机到达拣取点的时间 (t_w+t_D), 就会产生等待时间 $t_H=\max\{0, t_R-(t_w+t_D)\}$; E_{DC} 为三维紧致化仓储系统中在双命令下的存取货物的期望时间; t_w 为堆垛机在水平方向上从系统出入口出发到达存货点的时间, 堆垛机等待传送带移出空位用于存储的时间, 以及载货托盘在垂直方向上从系统出入口出发到达存货点的时间的最大值; t_U 为堆垛架和载货托盘将单位货物从取货位置运送到系统出入口的时间的最大值; t_0 为堆垛机在拣取点拾起货物和在存储点放下货物的时间, 在这里 t_0 是一个常数, 但为了简化分析, 假设 t_0 为 0, Hausman 等^[15]认为与堆垛机总使用时间相比, 这些时间很小。假设 (X, Y, Z) 分别为三维紧致化仓储系统中水平、载垂直和深度 3 个方向的一个坐标点, 分别代表堆垛机水平移动方向、载货托盘垂直移动方向和传送带深度移动方向。因为研究采取随机存储策略, 所以取货的期望时间可以被描述成一定的概率分布, 因此三维紧致化仓储系统的双命令行程期望时间可以表达为:

$$E_{DC} = E(t_w) + E(t_U) + E(t_D) + E(t_H) \quad (1)$$

1.2.2 双命令下存取货物去程期望时间 $E(t_w)$ 的推导

因为 t_w 是堆垛机在水平方向上从系统出入口出发到达存货点的时间, 堆垛机等待传送带移出空位用于存储的时间, 以及载货托盘在垂直方向上从系统出入口出发到达存货点的时间的最大值; 又因为 (X, Y, Z) 分别为三维紧致化仓储系统中水平、载垂直和深度 3 个方向的一个坐标点, 分别代表堆垛机水平移动方向、载货托盘垂直移动方向和传送带深度移动方向; 所以 t_w 是 X, Y, Z 中的最大值, $f(w)$ 是双命令下存取货物去程的期望时间 t_w 的概率密度函数, 故 $E(t_w)$ 可以用式 (2) 表达。

$$E(t_w) = \int_0^{\max(a,b,c)} wf(w)dw \quad (2)$$

因为 a, b 和 c 之间的大小关系不确定, 所以一共存在着 6 种情况。如果 a 是最大值, 则有 $b \leq c \leq a$ 和 $c \leq b \leq a$ 2 种情况。如果 b 是最大值, 则有 $c \leq a \leq b$ 和 $a \leq c \leq b$ 2 种情况。如果 c 是最大值, 则有 $a \leq b \leq c$ 和 $b \leq a \leq c$ 2 种情况。

1) $b \leq c \leq a$, 则去程期望时间可以表示为:

$$E(t_w) = \int_0^a wf(w)dw \quad (3)$$

使 $F(w)$ 记做是取货去程时间 t_w 小于或等于 w 的概率分布函数, $F(w)$ 可以用式 (4) 表达。

$$\begin{aligned} F(w) &= P(t_w \leq w) = P(\max\{X, Y, Z\} \leq w) \\ &= P(X \leq w) \cdot P(Y \leq w) \cdot P(Z \leq w) \end{aligned} \quad (4)$$

因为研究使用的是随机存储, 位置坐标是均匀分布的, 所以有:

$$P(X \leq w) = \begin{cases} w/a, & \text{if } 0 < w \leq a \\ 1, & \text{if } a < w \end{cases} \quad (5)$$

$$P(Y \leq w) = \begin{cases} w/b, & \text{if } 0 < w \leq b \\ 1, & \text{if } b < w \end{cases} \quad (6)$$

$$P(Z \leq w) = \begin{cases} w/c, & \text{if } 0 < w \leq c \\ 1, & \text{if } c < w \end{cases} \quad (7)$$

因此由式 (5), (6) 和 (7) 可得:

$$F(w) = \begin{cases} w^3/abc, & \text{if } 0 < w \leq b \\ w^2/ac, & \text{if } b < w \leq c \\ w/a, & \text{if } c < w \leq a \\ 1, & \text{if } a < w \end{cases} \Rightarrow \quad (8)$$

$$f(w) = \begin{cases} 3w^2/abc, & \text{if } 0 < w \leq b \\ 2w/ac, & \text{if } b < w \leq c \\ 1/a, & \text{if } c < w \leq a \\ 0, & \text{if } a < w \end{cases}$$

则:

$$E_1(t_w) = \int_0^b \frac{3w^3}{abc} dw + \int_b^c \frac{2w^2}{ac} dw + \int_c^a \frac{w}{a} dw = \frac{b^3 + 2c^3 + 6a^2c}{12ac} \quad (9)$$

2) $c \leq b \leq a$, 则去程期望时间可以表示为:

$$E(t_w) = \int_0^a wf(w)dw \quad (10)$$

并且 $P(X \leq w)$, $P(Y \leq w)$ 和 $P(Z \leq w)$ 的表达式分别与式 (5), 式 (6) 和式 (7) 相同, 因此, $F(w)$ 和 $f(w)$ 的表达式为:

$$F(w) = \begin{cases} w^3/abc, & \text{if } 0 < w \leq c \\ w^2/ac, & \text{if } c < w \leq b \\ w/a, & \text{if } b < w \leq a \\ 1, & \text{if } a < w \end{cases} \Rightarrow \quad (11)$$

$$f(w) = \begin{cases} 3w^2/abc, & \text{if } 0 < w \leq c \\ 2w/ac, & \text{if } c < w \leq b \\ 1/a, & \text{if } b < w \leq a \\ 0, & \text{if } a < w \end{cases}$$

则:

$$E_2(t_w) = \int_0^c \frac{3w^3}{abc} dw + \int_c^b \frac{2w^2}{ab} dw + \int_b^a \frac{w}{a} dw = \frac{c^3 + 2b^3 + 6a^2b}{12ab} \quad (12)$$

3) $b \leq a \leq c$, 则去程期望时间可以表示为:

$$E(t_w) = \int_0^c wf(w)dw \quad (13)$$

因此,按上述 1) 和 2) 的求解方法同理可得:

$$E3(t_W) = \int_0^b \frac{3w^3}{abc} dw + \int_b^a \frac{2w^2}{ac} dw + \int_a^c \frac{w}{c} dw = \frac{b^3 + 2a^3 + 6ac^2}{12ac} \quad (14)$$

4) $a \leq b \leq c$, 则去程期望时间可以表示为:

$$E(t_W) = \int_0^c wf(w)dw \quad (15)$$

因此,按 1) 和 2) 的求解方法同理可得:

$$E4(t_W) = \int_0^a \frac{3w^3}{abc} dw + \int_a^b \frac{2w^2}{bc} dw + \int_b^c \frac{w}{c} dw = \frac{a^3 + 2b^3 + 6bc^2}{12bc} \quad (16)$$

5) $a \leq c \leq b$, 则去程期望时间可以表示为:

$$E(t_W) = \int_0^b wf(w)dw \quad (17)$$

因此,按 1) 和 2) 的求解方法同理可得:

$$E5(t_W) = \int_0^a \frac{3w^3}{abc} dw + \int_a^c \frac{2w^2}{bc} dw + \int_c^b \frac{w}{b} dw = \frac{a^3 + 2c^3 + 6b^2c}{12bc} \quad (18)$$

6) $c \leq a \leq b$, 则去程期望时间可以表示为:

$$E(t_W) = \int_0^b wf(w)dw \quad (19)$$

因此,按上述 1) 和 2) 的求解方法同理可得:

$$E6(t_W) = \int_0^c \frac{3w^3}{abc} dw + \int_c^a \frac{2w^2}{ab} dw + \int_a^b \frac{w}{b} dw = \frac{c^3 + 2a^3 + 6ab^2}{12ab} \quad (20)$$

1.2.3 双命令下存取货物回程期望时间 $E(t_U)$ 的推导

t_U 为堆垛架和载货托盘将单位货物从取货位置运送到系统出入口的时间的最大值,即 t_U 是 X 与 Y 值中取最大值, $f(u)$ 为双命令下存取货物回程的期望时间 t_U 的概率密度函数,故 $E(t_U)$ 可以用式 (21) 表达。

$$E(t_U) = \int_0^{\max(a,b)} uf(u)du \quad (21)$$

按照 a 和 b 的大小关系,可以分为 $b \leq a$ 或 $a \leq b$ 这 2 种情况进行分析。

1) $b \leq a$ 。

$$E(t_U) = \int_0^a uf(u)du \quad (22)$$

使 $F(u)$ 记做双命令下存取货物回程时间 t_U 小于或等于 u 的概率分布函数,又堆垛机和载货托盘在运行时是相互独立的,所以 $F(u)$ 可以用式 (22) 表达。

$$F(u) = P(t_U \leq u) = P(\max(X, Y) \leq u) = P(X \leq u) \cdot P(Y \leq u) \quad (23)$$

因为是采用的是随机存储策略,坐标位置是均匀分布的,所以有:

$$P(X \leq u) = \begin{cases} u/a, & \text{if } 0 < u \leq a \\ 1, & \text{if } a < u \end{cases} \quad (24)$$

$$P(Y \leq u) = \begin{cases} u/b, & \text{if } 0 < u \leq b \\ 1, & \text{if } b < u \end{cases} \quad (25)$$

由式 (24) 和 (25) 可得:

$$F(u) = \begin{cases} u^2/ab, & \text{if } 0 < u \leq b \\ u/a, & \text{if } b < u \leq a \\ 1, & \text{if } a < u \end{cases} \Rightarrow \quad (26)$$

$$f(u) = \begin{cases} 2u/ab, & \text{if } 0 < u \leq b \\ 1/a, & \text{if } b < u \leq a \\ 0, & \text{if } a < u \end{cases}$$

则:

$$E1(t_U) = \int_0^b \frac{2u^2}{ab} du + \int_b^a \frac{u}{a} du = \frac{b^2}{6a} + \frac{a}{2} \quad (27)$$

2) $a \leq b$, 则:

$$E(t_U) = \int_0^b uf(u)du \quad (28)$$

按上述方法,同理可得:

$$E2(t_U) = \int_0^a \frac{2u^2}{ab} du + \int_a^b \frac{u}{b} du = \frac{a^2}{6b} + \frac{b}{2} \quad (29)$$

1.2.4 双命令下存取货物存储点到拣取点期望时间 $E(t_D)$ 的推导

t_D 为堆垛机从存储点到另一个拣取点的行程时间,这是 2 个随机选择点的行程时间。Bozer 和 White 在其研究中证明出了 $E(t_D)$ 的表达式。

$$f_{t_D}(d) = \begin{cases} \frac{2-2d}{2d/\beta-d^2/\beta^2} + \frac{2d-d^2}{2/\beta-2d/\beta^2} & \text{if } 0 \leq d \leq \beta \\ 2-2\beta & \text{if } \beta < d \leq 1 \end{cases}$$

$$E(t_D) = \left(\frac{1}{3} + \frac{\beta^2}{6} - \frac{\beta^3}{30} \right) a \quad (30)$$

其中 $\beta=b/a$, 则:

$$E(t_D) = \left(\frac{1}{3} + \frac{b^2}{6a^2} - \frac{b^3}{30a^3} \right) a \quad (31)$$

2 自动化仓储系统出入口位置的优化

郝晶晶^[13]在其研究中详细展开了单命令模式的自动化仓储系统出入口的优化研究,利用假设出入口在多层货架底端的位置进行分析,从而得到各种不同的存取货物的期望时间模型。在该研究中,同样采用此假设方法,对系统出入口位置的假设及模型进行分析。

假设系统出入口位置在多层货架底端距底边最左端的距离为 xa , $x \in [0,1]$, 所以仓储系统水平长度被分割为 xa 和 $(1-x)a$, 根据 xa , $(1-x)a$, b 和 c 之间的关系,可以得到共计 24 种双命令下存取货物的期望时间模型。

1) $xa \leq b \leq c \leq (1-x)a$ 。

Subject to: $D1 = \{x \in [0,1]: 0 \leq x \leq b/a, 0 \leq x \leq 1-c/a, 0 \leq x \leq 0.5\}$

$$EDC1 = \frac{1}{60abc} (-2a^5b^4c + 10a^4b^3c + 5a^4x^4 + 10a^3cx^3 + 60a^2bcx^2 - 120a^2bcx + 80a^2bc + 60ab^2cx + 10ac^3x + 20b^3c + 5c^4) \quad (32)$$

$$2) (1-x)a \leq c \leq b \leq xa。$$

$$\text{Subject to: } D_2 = \{x \in [0,1]: c/a \leq x \leq 1, 1-b/a \leq x \leq 1, 0.5 \leq x \leq 1\}$$

$$EDC2 = \frac{1}{30ac} (-a^5b^3c + 5a^4b^2c + 60a^2cx^2 - 60a^2cx + 40a^2c + 5b^3 + 10b^2c + 10c^3) \quad (33)$$

$$3) b \leq xa \leq c \leq (1-x)a。$$

$$\text{Subject to: } D_3 = \{x \in [0,1]: b/a \leq x \leq c/a, b/a \leq x \leq 1-c/a, b/a \leq x \leq 0.5\}$$

$$EDC3 = \frac{1}{30ac} (-a^5b^3c + 5a^4b^2c + 5a^3x^3 + 45a^2cx^2 - 60a^2cx + 40a^2c + 15ac^2x + 5b^3 + 10b^2c + 5c^3) \quad (34)$$

$$4) b \leq c \leq xa \leq (1-x)a。$$

$$\text{Subject to: } D_4 = \{x \in [0,1]: c/a \leq x \leq 0.5\}$$

$$EDC4 = \frac{1}{30ac} (-a^5b^3c + 5a^4b^2c + 60a^2cx^2 - 60a^2cx + 40a^2c + 5b^3 + 10b^2c + 10c^3) \quad (35)$$

$$5) b \leq xa \leq (1-x)a \leq c。$$

$$\text{Subject to: } D_5 = \{x \in [0,1]: 1-c/a \leq x \leq 0.5, b/a \leq x \leq 0.5\}$$

$$EDC5 = \frac{1}{30ac} (-a^5b^3c + 5a^4b^2c + 15a^3x^2 - 15a^3x + 5a^3 + 30a^2cx^2 - 30a^2cx + 25a^2c + 15ac^2 + 5b^3 + 10b^2c) \quad (36)$$

$$6) xa \leq b \leq (1-x)a \leq c。$$

$$\text{Subject to: } D_6 = \{x \in [0,1]: 1-c/a \leq x \leq b/a, 1-c/a \leq x \leq 0.5\}$$

$$EDC6 = \frac{1}{60abc} (10b^3c + 10a^3 + 5b^4 + 10ab(xb^2 + 3xbc + 3c^2) + 5a^4x^4 + 10a^4b^3c - 2a^5b^4c + 50a^2bc - 60a^2bcx + 30a^2bcx^2) \quad (37)$$

$$7) xa \leq (1-x)a \leq b \leq c。$$

$$\text{Subject to: } D_7 = \{x \in [0,1]: 1-b/a \leq x \leq 0.5\}$$

$$EDC7 = \frac{1}{60bc} (-2a^4b^4c + 10a^3b^3c + 10a^3x^4 - 20a^3x^3 + 30a^3x^2 - 20a^3x + 5a^3 + 30a^2cx^2 - 30a^2cx + 10a^2c + 20abc + 10b^3 + 30b^2c + 30bc^2) \quad (38)$$

$$8) b \leq (1-x)a \leq c \leq xa。$$

$$\text{Subject to: } D_8 = \{x \in [0,1]: c/a \leq x \leq 1-b/a, 1-c/a \leq x \leq 1-b/a, 0.5 \leq x \leq 1-b/a\}$$

$$EDC8 = \frac{1}{30ac} (-a^5b^3c + 5a^4b^2c - 5a^3x^3 + 15a^3x^2 - 15a^3x + 5a^3 + 45a^2cx^2 - 30a^2cx + 25a^2c - 15ac^2x + 15ac^2 + 5b^3 + 10b^2c + 5c^3) \quad (39)$$

$$9) b \leq c \leq (1-x)a \leq xa。$$

$$\text{Subject to: } D_9 = \{x \in [0,1]: 0.5 \leq x \leq 1-c/a\}$$

$$EDC9 = \frac{1}{30ac} (-a^5b^3c + 5a^4b^2c + 15a^3x^2 - 15a^3x + 5a^3 + 30a^2cx^2 - 30a^2cx + 25a^2c + 15ac^2 + 5b^3 + 10b^2c) \quad (40)$$

$$10) b \leq (1-x)a \leq xa \leq c。$$

$$\text{Subject to: } D_{10} = \{x \in [0,1]: 0.5 \leq x \leq 1-b/a, 0.5 \leq x \leq c/a\}$$

$$EDC_{10} = \frac{1}{30ac} (-a^5b^3c + 5a^4b^2c + 15a^3x^2 - 15a^3x + 5a^3 + 30a^2cx^2 - 30a^2cx + 25a^2c + 15ac^2 + 5b^3 + 10b^2c) \quad (41)$$

$$11) (1-x)a \leq b \leq xa \leq c。$$

$$\text{Subject to: } D_{11} = \{x \in [0,1]: b/a \leq x \leq c/a, 1-b/a \leq x \leq c/a, 0.5 \leq x \leq 1\}$$

$$EDC_{11} = \frac{1}{60abc} (5a^4 - 20a^4x + 5b^3 + 10ab(3bc - b^2x + 2a^3 + b^2 + 3c^2 - 3bcx) + 30a^4x^2 - 20a^4x^3 + 5a^4x^4 + 10a^4b^3c - 2a^5b^4c + 20a^2bc + 30a^2bcx^2) \quad (42)$$

$$12) (1-x)a \leq xa \leq b \leq c。$$

$$\text{Subject to: } D_{12} = \{x \in [0,1]: 0.5 \leq x \leq b/a\}$$

$$EDC_{12} = \frac{1}{60bc} (-2a^4b^4c + 10a^3b^3c + 10a^3x^4 - 20a^3x^3 + 30a^3x^2 - 20a^3x + 5a^3 + 30a^2cx^2 - 30a^2cx + 10a^2c + 20abc + 10b^3 + 30b^2c + 30bc^2) \quad (43)$$

13) 到 24) 的推导形式类似于以上 12 种情况, 为了简化求解过程, 文中只展示 1) 到 12) 的模型的存取货物期望时间。

1) $xa \leq b \leq c \leq (1-x)a$ 。根据式 (32), 可以得到:

$$E_{DC1'}(x) = \frac{(4a^4x^3 + 6a^3cx^2 + 2ac(6b^2 + c^2) + 12a^2bc(2x-2))}{12abc}。$$

因为 $x \leq 0.5$, $b \leq c$, 所以可以得到:

$$\frac{(4a^4x^3 + 6a^3cx^2 + 2ac(6b^2 + c^2) + 12a^2bc(2x-2))}{12abc} \leq$$

$$\frac{\frac{a^4}{2} - \frac{9a^3c}{2} + 2ac\left(\frac{3a^2}{2} + c^2\right)}{6a^2c}。$$

因为 $c \leq 0.5a$, 所以可得: $\frac{\frac{a^4}{2} - \frac{9a^3c}{2} + 2ac\left(\frac{3a^2}{2} + c^2\right)}{6a^2c} \leq$

$$\frac{\frac{a^4}{2} - \frac{9a^4}{4} + a^2\left(\frac{3a^2}{2} + \frac{1}{4}a^2\right)}{3a^3} = 0$$

所以得证, $E_{DC1}(x)$ 是 x 的减函数, 故 x 等于 0.5 时 $E_{DC1}(x)$ 取得最小值。

2) $(1-x)a \leq c \leq b \leq xa$ 。根据式 (33) 可以得到:

$$E_{DC2'}(x) = \frac{-(12a^2c - 24a^2cx)}{6ac}$$

。因为 $x \geq 0.5$, 所以可

以得到: $\frac{-(12a^2c - 24a^2cx)}{6ac} \geq \frac{-(12a^2c - 12a^2c)}{6ac} = 0$, 则得证, $E_{DC2}(x)$ 是 x 的增函数。故 x 等于 0.5 时 $E_{DC2}(x)$ 取得最小值。

3) $b \leq xa \leq c \leq (1-x)a$ 。根据式 (34), 可以得到:

$$E_{DC3'}(x) = \frac{3a^3x^2 + 18a^2cx - 12a^2c + 3ac^2}{6ac}$$

。因为 $x \leq 0.5$, 所以可以得到 $\frac{3a^3x^2 + 18a^2cx - 12a^2c + 3ac^2}{6ac} \leq$

$$\frac{\frac{3}{4}a^3 + 9a^2c - 12a^2c + 3ac^2}{6ac}$$

$$\frac{\frac{3}{4}a^3 + 9a^2c - 12a^2c + 3ac^2}{6ac} \leq \frac{\frac{3}{4}a^3 + \frac{9}{2}a^3 - 6a^3 + \frac{3}{4}a^3}{3a^2} = 0$$

。又因为 $c \leq 0.5a$, 所以得证, $E_{DC3}(x)$ 是 x 的减函数, 故等于 0.5 时 $E_{DC3}(x)$ 取得最小值。

4) $b \leq c \leq xa \leq (1-x)a$ 。根据式 (35), 可以得到:

$$E_{DC4'}(x) = \frac{-(12a^2c - 24a^2cx)}{6ac}$$

。因为 $x \leq 0.5$, 所以可以

得到 $\frac{-(12a^2c - 24a^2cx)}{6ac} \leq \frac{-(12a^2c - 12a^2c)}{6ac} = 0$ 。则得证, $E_{DC4}(x)$ 是 x 的减函数, 故 x 等于 0.5 时 $E_{DC4}(x)$ 取得最小值。

5) $b \leq xa \leq (1-x)a \leq c$ 。根据式 (36), 可以得到:

$$E_{DC5'}(x) = \frac{-(6a^2c - 6a^3x + 3a^3 - 12a^2cx)}{6ac}$$

。因为 $x \leq 0.5$, 所以可以得到: $\frac{-(6a^2c - 6a^3x + 3a^3 - 12a^2cx)}{6ac} \leq$

$$\frac{-(6a^2c - 3a^3 + 3a^3 - 6a^2c)}{6ac} = 0$$

。可以得证, $E_{DC5}(x)$ 是 x 的减函数, 故 x 等于 0.5 时 $E_{DC5}(x)$ 取得最小值。

6) $xa \leq b \leq (1-x)a \leq c$ 。根据式 (37), 可以得到:

$$E_{DC6'}(x) = \frac{b^2(b+3c) + 6abc(x-1) + 2a^3x^3 - 3a^2(b(x-1)^2 - cx^2)}{6bc}$$

因为 $x \leq 0.5$, $b \leq 0.5a$, 所以 $\frac{b^2(b+3c) + 6abc(x-1) + 2a^3x^3 - 3a^2(b(x-1)^2 - cx^2)}{6bc} \leq 0$ 。

可以得证, $E_{DC6}(x)$ 是 x 的减函数, 故 x 等于 0.5 时 $E_{DC6}(x)$ 取得最小值。

7) $xa \leq (1-x)a \leq b \leq c$ 。根据式 (38), 可以得到:

$$E_{DC7'}(x) = \frac{-(-8a^3x^3 + 12a^3x^2 - 12a^3x + 4a^3 - 12ca^2x + 6ca^2)}{12bc}$$

。因为 $x \leq 0.5$, 所以 $E_{DC7'}(x) \leq \frac{-(-a^3 + 3a^3 - 6a^3 + 4a^3 - 6ca^2 + 6ca^2)}{12bc} = 0$ 。可得证,

$E_{DC7}(x)$ 是 x 的减函数, 故 x 等于 0.5 时 $E_{DC7}(x)$ 取得最小值。

8) $b \leq (1-x)a \leq c \leq xa$ 。根据式 (39), 可以得到:

$$E_{DC8'}(x) = \frac{-(3a^3x^2 - 6a^3x + 3a^3 - 18a^2cx + 6a^2c + 3ac^2)}{6ac}$$

。因为 $x \leq 0.5$, 所以可得: $\frac{-(3a^3x^2 - 6a^3x + 3a^3 - 18a^2cx + 6a^2c + 3ac^2)}{6ac} \leq 0$ 。可以

得证, $E_{DC8}(x)$ 是 x 的减函数, 故 x 等于 0.5 时 $E_{DC8}(x)$ 取得最小值。

9) $b \leq c \leq (1-x)a \leq xa$ 。根据式 (40), 可以得到:

$$E_{DC9'}(x) = \frac{-(6a^2c - 6a^3x + 3a^3 - 12a^2cx)}{6ac}$$

。因为 $x \geq 0.5$, 所以可以得到: $\frac{-(6a^2c - 6a^3x + 3a^3 - 12a^2cx)}{6ac} \geq 0$ 。可

以得证, $E_{DC9}(x)$ 是 x 的增函数, 故 x 等于 0.5 时 $E_{DC9}(x)$ 取得最小值。

10) $b \leq (1-x)a \leq xa \leq c$ 。根据式 (41), 可以得到:

$$E_{DC10'}(x) = \frac{-(6a^2c - 6a^3x + 3a^3 - 12a^2cx)}{6ac}$$

。因为 $x \geq 0.5$, 所以可以得到: $\frac{-(6a^2c - 6a^3x + 3a^3 - 12a^2cx)}{6ac} \geq 0$ 。

可以得证, $E_{DC10}(x)$ 是 x 的增函数, 故 x 等于 0.5 时 $E_{DC10}(x)$ 取得最小值。

11) $(1-x)a \leq b \leq xa \leq c$ 。根据式 (42), 可以得到:

$$E_{DC11'}(x) = \frac{-b^3 - 3b^2c + 2a^3(x-1)^3 + 6abcx - 3a^2(c(x-1)^2 - bx^2)}{6bc}$$

。因为 $x \geq 0.5$, $b \leq c$, $b \leq 0.5a$ 所以可以得到: $\frac{-b^3 - 3b^2c + 2a^3(x-1)^3 + 6abcx - 3a^2(c(x-1)^2 - bx^2)}{6bc} \geq$

$$\frac{-(2b - 2b)^2(2b + 4b)}{24b^2} = 0$$

。可以得证, $E_{DC11}(x)$ 是 x 的增函数, 故 x 等于 0.5 时 $E_{DC11}(x)$ 取得最小值。

12) $(1-x)a \leq xa \leq b \leq c$ 。根据式(41), 可以得到:

$$E_{DC12'}(x) = \frac{-(-8a^3x^3 + 12a^3x^2 - 12a^3x + 4a^3 - 12ca^2x + 6ca^2)}{12bc}。$$

因为 $x \geq 0.5$, 所以可以得到:

$$\frac{-(-8a^3x^3 + 12a^3x^2 - 12a^3x + 4a^3 - 12ca^2x + 6ca^2)}{12bc} \geq 0。$$

可以得证, $E_{DC12}(x)$ 是 x 的增函数, 故 x 等于 0.5 时 $E_{DC12}(x)$ 取得最小值。

13) —24) 的证明过程与上述 12 种类型相似, 为了简化求解过程, 文中只展示 1) —12) 模型的存取货物期望时间证明求解过程。

综合上述证明, 文中可得到结论, 当 x 等于 0.5 时, 即系统出入口 (I/O) 在三维紧致化仓储系统多层仓储货架底端的中点位置时, 整个仓储系统在双命令下的存取货物的期望行程时间最短。

3 结语

研究结果得出, 在双命令存储模式下, 三维紧致化仓储系统的系统出入口的位置在货架底端中点位置时, 整个仓储系统在双命令下的存取货物的期望行程时间最短。研究的创新在于对单命令存储模式下系统出入口的优化设计进行改进, 用更为实际的双命令存储模式下的自动化仓储系统为载体, 研究了系统出入口在整个仓储系统中的最优位置。

参考文献:

- [1] BERG J P V D, ZIJM W H M. Models for Warehouse Management: Classification and Examples[J]. International Journal of Production Economics, 1999, 59(1/2/3): 519—528.
- [2] LEE Y H, LEE M H, SUN H. Optimal Design of Rack Structure with Modular Cell in AS/RS[J]. International Journal of Production Economics, 2005, 98(2): 172—178.
- [3] SARKER B R, BABU P S. Travel Time Models in Automated Storage/Retrieval Systems: A Critical Review[J]. International Journal of Production Economics, 1995, 40(2/3): 173—184.
- [4] GUE K R, KIM B S. Puzzle-based Storage Systems[J]. Naval Research Logistics, 2007, 54(5): 556—567.
- [5] ZAERPOUR N, YU Y, KOSTER R B M D. Small Is Beautiful: a Framework for Evaluating and Optimizing Live-cube Compact Storage Systems[J]. Transportation Science, 2017, 51(1): 1—19.
- [6] DE KOSTER R (M) B, LE-DUC T, YUGANG Y. Optimal Storage Rack Design for a 3-Dimensional Compact AS/RS[J]. International Journal of Production Research, 2008, 46(6): 1495—1514.
- [7] YUGANG Y, DE KOSTER R (M) B. Optimal Zone Boundaries for Two-class-based Compact Three-dimensional Automated Storage and Retrieval Systems[J]. Iie Transactions, 2009, 41(3): 194—208.
- [8] YUGANG Y, DE KOSTER R (M) B. Sequencing Heuristics for Storing and Retrieving Unit Loads in 3D Compact Automated Warehousing Systems[J]. Iie Transactions, 2012, 44(2): 69—87.
- [9] BOZER Y, WHITE J. Travel-time Models for Automated Storage/Retrieval Systems[J]. A I I E Transactions, 1984, 16(4): 329—338.
- [10] ROODBERGEN K J, VIS I F A. A Survey of Literature on Automated Storage and Retrieval Systems[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 194(2): 343—362.
- [11] 沈古文. 紧致仓储系统绩效及运作策略研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2014.
SHEN Gu-wen. Compact Storage System Performance and Operational Strategy Research[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2014.
- [12] 刘兵兵, 孙李波, 余玉刚. 仓储、物流与供应链管理研究新进展[J]. 中国科学技术大学学报, 2017, 47(2): 176—187.
LIU Bing-bing, SUN Li-bo, YU Yu-gang. New Progress in Research on Warehousing, Logistics and Supply Chain Management[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2017, 47(2): 176—187.
- [13] 郝晶晶. 自动化仓储系统的设计与应用前景分析[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2015.
HAO Jing-jing. Automatic Warehousing Design and the Application Foreground[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2015.
- [14] ASHAYERI J, HEUTS R M, VALKENBURG M W T, et al. A Geometrical Approach to Computing Expected Cycle Times for Zonebased Storage Layouts in AS/RS[J]. International Journal of Production Research, 2002, 40(17): 4467—4483.
- [15] HAUSMAN W H, SCHWARZ L B, GRAVES S C. Optimal Storage Assignment in Automatic Warehousing Systems[J]. Management Science, 1976, 22(6): 629—638.