

新型单支链含球铰闭环并联机构的位置分析

李虹, 李亚丽, 李瑞琴, 胡洋
(中北大学 机械工程学院, 太原 030051)

摘要: **目的** 鉴于 4S 闭环结构的优良运动性能, 设计一种带球铰闭环的新型并联机构, 并对其位置解及工作空间进行分析。 **方法** 针对所设计的闭环并联机构, 首先建立机构模型, 然后用约束螺旋计算其自由度, 其次基于数值法求解位置正反解, 并通过相应运动算例验证其正确性, 最后利用数值搜索法求解工作空间并进行分析。 **结果** 动平台能够实现绕 y 轴转动、沿 y 方向移动和沿 z 方向移动的 3 自由度; 闭环并联机构在约束参数范围内的工作空间连续稳定且没有出现空洞。 **结论** 3 条支链和 4S 闭环并联机构减少了过约束和奇异位型, 且运动性能优良、运动空间大, 在并联机床和工业机器人领域有可观的应用前景。

关键词: 并联机构; 自由度; 位置正反解; 工作空间

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2018)23-0158-06

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2018.23.027

Position of New Single-branch Closed-loop Parallel Mechanism with Ball Joints

LI Hong, LI Ya-li, LI Rui-qin, HU Yang
(School of Mechanical Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China)

ABSTRACT: The work aims to design a new closed loop parallel mechanism with ball joints, and analyze its position solution and working space, in view of the excellent motion performance of the 4S closed-loop structure. The mechanism model was firstly established for the designed closed-loop parallel mechanism. Then, the constraint screw was used to calculate its degree of freedom. Secondly, the forward and inverse position solution was solved based on the numerical method and its correctness was verified by the corresponding motion example. Finally, the numerical search method was used to solve the working space and for the analysis. The moving platform could realize 3 degrees of freedom around the y -axis rotation, and of the movement along y and z directions. The working space of the closed-loop parallel mechanism was continuously stable and had no holes within the range of constraint parameters. The three-branch and 4S closed-loop parallel structure reduces the over-constrained and singular-position type, has excellent motion performance and large motion space, and considerable application prospects in the field of parallel machine tools and industrial robots.

KEY WORDS: parallel mechanism; degree of freedom; forward and reverse position solution; working space

文中提出新型单支链含球铰闭环并联机构, 动平台和机架由 2 个相同的 PRT 支链和一个 P(4S)支链相连。一个支链应用的 4S 闭环机构能够保持着平面特性不变, 不存在过约束, 这一结构曾被最成功并联机器人 Delta 所应用, 并有多种变异形式^[1]。与采用对称支链的 Delta 机器人相比, 文中机构采用非对称支链, 运动学和动力学性能非对称, 可以适用于某些方向性能要求较高而其他方向性能要求较低的特殊场合。非对称的并联机构对于并联机构也具有非常重要

的意义, 典型的机构有应用较为广泛的 Tricept 机床^[2]、天津大学的 Trivariant 机器人^[3]。胡少刚对一般非对称 6/6-SPS 型 Stewart 并联机构位置正解进行了分析^[4]; 石明提出可以用于 3D 打印的非对称 3-P-(2SS)并联机构并对其工作空间和动力学进行了分析^[5]。

在自动包装线上, 该机构运动学解耦计算方便, 便于实时运动控制。此外, 该机构采用三支链结构, 具有约束少、不容易干涉、奇异位形较少、运动空间

收稿日期: 2018-08-18

作者简介: 李虹 (1966—), 女, 硕士, 中北大学副教授, 主要研究方向为机构理论与机器人技术。

较大、运动性能优良、动态响应快等优点，因此可实现高精度快速分拣，提高包装工作的效率以及准确性，在各行业（如食品、医药、饮料等行业）将会有广泛的应用。

1 并联机构的模型和自由度计算

1.1 机构模型及坐标系

该并联机构见图 1，动平台和定平台通过 2 个相同的 PRT 支链和一个 P(4S)支链相连。动平台形状为等腰直角三角形，其中心点 O_B 与端点 a_i 距离为 r ，定平台形状为等腰直角三角形，其中心点 O_A 与端点 A_i 距离为 R 。连杆长度为 $a_1B_1=a_2B_2=a_3B_3=L$ 。以直角三角形斜边的中点为坐标原点 O_A 建立坐标系 $O_A-x_Ay_Az_A$ ，其中 x_A 轴垂直于 A_1A_2 ， y_A 平行于 A_1A_2 ， z_A 轴垂直于静平台；以动平台斜边的原点坐标原点 O_B 建立坐标系 $O_B-x_By_Bz_B$ ，其中 x_B 轴垂直于 a_1a_2 ， y_B 轴平行于 a_1a_2 ， z_B 轴垂直于动平台。

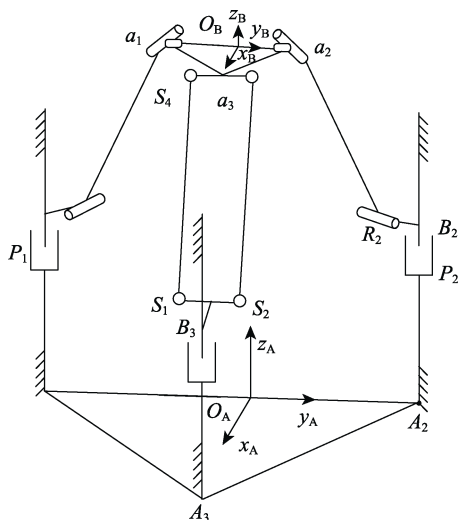


图 1 并联机构结构

Fig.1 Parallel mechanism structure

1.2 自由度分析与计算^[7]

该并联机构的各支链非对称，所以需要对该机构每条支链进行螺旋分析，支链结构见图 2、图 3。

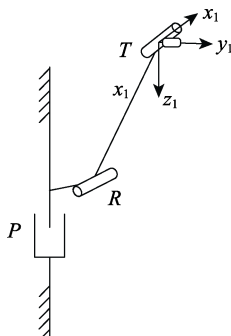


图 2 支链 1, 2

Fig.2 Branches 1 and 2

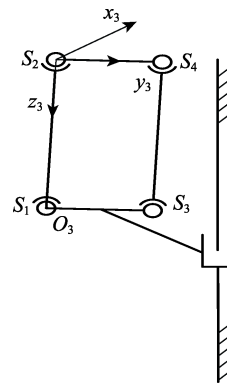


图 3 支链 3

Fig.3 Branch 3

第 1 条支链在局部坐标系 $O_1-x_1y_1z_1$ 中运动螺旋表示为：

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11} &= (1 \ 0 \ 0; 0 \ e \ f) \\ \mathcal{S}_{12} &= (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{13} &= (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{14} &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1) \end{aligned} \quad (1)$$

通过式 (1) 来计算反螺旋，就得出第 1 支链的约束螺旋系。

$$\mathcal{S}_{11}^r = \mathcal{S}_{21}^r = (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \quad (2)$$

$$\mathcal{S}_{12}^r = \mathcal{S}_{22}^r = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1)$$

支链 2 与支链 1 布置方式相同，其螺旋系同上。

第 3 条支链分为 2 分链，分链 1 在局部坐标系 $O_3-x_3y_3z_3$ 表示为：

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{311} &= (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{312} &= (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{313} &= (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{314} &= (1 \ 0 \ 0; 0 \ e_{14} \ 0) \\ \mathcal{S}_{315} &= (0 \ 1 \ 0; d_{15} \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{316} &= (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \end{aligned} \quad (3)$$

对式 (3) 计算反螺旋，求得分链 1 的约束螺旋见式 (4)。

$$\mathcal{S}_{31}^r = (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \quad (4)$$

$$\mathcal{S}_{32}^r = (0 \ 0 \ 1; d_2 \ 0 \ 1) \quad (5)$$

分链 2 与其结构布置相同，结果见式 (5)。式 (4) 和式 (5) 求得支链 3 的运动螺旋。

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{31}^{\pi} &= (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{32}^{\pi} &= (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{33}^{\pi} &= (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{34}^{\pi} &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0) \end{aligned} \quad (6)$$

移动副 P 的运动螺旋可以表示为：

$$\mathcal{S}_p = (0 \ 0 \ 0; d_p \ 0 \ f_p) \quad (7)$$

将式 (6) 和式 (7) 计算反螺旋，就可得出支链 3 的约束螺旋。

$$\mathcal{S}_3^r = (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0) \quad (8)$$

结合式 (2) 和式 (8) 求出整个机构的运动螺旋系。

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1^{\text{rr}} &= (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_2^{\text{rr}} &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1) \\ \mathcal{S}_3^{\text{rr}} &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0) \end{aligned} \quad (9)$$

运用螺旋理论证明了该并联机构可以实现 y 方向转动、沿 y 方向的移动和 z 方向的移动。

下面根据 G-K 公式求得并联机构的自由度。

$$F = d(n - g - 1) + \sum_i^g f_i + v - \zeta = 3 \quad (10)$$

式中：并联机构的阶数 d 为 6；总构件数 n 为 9；运动副数目 g 为 11；冗余约束 v 为 2；局部自由度 ζ

为 2。

螺旋理论和 G-K 公式均验证了机构具有三自由度。

2 位置正反解求解

2.1 位置反解分析

动平台的位置姿态用 z - x - y 型欧拉角表示，已知动平台最先绕坐标系 $O_B-x_B y_B z_B$ 的 z 轴旋转 φ 角，再在新坐标系上绕 y 轴旋转 θ 角，最后再绕 x 轴旋转 ψ 角，旋转矩阵可以描述为：

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix} \quad (11)$$

由螺旋分析可知动平台实现 2 移动 1 转动，所以，

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

动平台点 a_i 在动平台 $O_B-x_B y_B z_B$ 动坐标系中的位置参数为：

$${}^{OB}a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix}, {}^{OB}a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}, {}^{OB}a_3 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

定平台点 B_i 在定坐标系 $O_A-x_A y_A z_A$ 中的位置参数为：

$${}^O B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ H_1 \end{bmatrix}, {}^O B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ H_3 \end{bmatrix}, {}^O B_3 = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

点 a_i 在定坐标系 $O_A-x_A y_A z_A$ 中的位置参数表示如下：

$${}^O a_i = R^* {}^{OB} a_i + P \quad (15)$$

式中： $P = (0 \ y \ z)^T$ 。经过坐标变换由等式 (15) 可得坐标点 a_i 在定坐标系 $O_A-x_A y_A z_A$ 的坐标，表示为：

$${}^O a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -r+y \\ z \end{bmatrix}, {}^O a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ r+y \\ z \end{bmatrix}, {}^O a_3 = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ y \\ -r \sin \theta + z \end{bmatrix} \quad (16)$$

则机构运动学反解可由下列约束方程求得。

$$\|a_i - B_i\| = L (i=1, 2, 3) \quad (17)$$

将式 (14)、式 (16) 带入式 (17) 求得 H_i 如下：

$$\begin{aligned} H_1 &= z \pm \sqrt{L_2^2 - (-r+y+R)_2^2} \\ H_2 &= z \pm \sqrt{L^2 - (r+y-R)^2} \\ H_3 &= z - r \sin \theta \pm \sqrt{L^2 - (r \cos \theta - r)^2 - y^2} \end{aligned} \quad (18)$$

由式 (18) 可得到 8 组解。但在实际应用中只会出现“±”取“-”时的解。

2.2 位置正解分析

相对于反解的求解过程，机构的正解计算量十分繁琐且计算量大^[6-10]。机构的位置正解为已知驱动杆输入位置 H_i 参数来求解动平台的位置参数 θ, y, z ，各个支链杆长 L_i 的值已知，通过式 (17) 和式 (18) 联立可得：

$$y = az + b \quad (19)$$

$$\text{式中：} a = \frac{H_3 - H_1}{2(r - R)}, b = \frac{H_1^2 - H_3^2}{4(r - R)}.$$

$$z = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4ce}}{2c} \quad (20)$$

式中： $c = a^2 + 1$ ， $d = 2a(b - r + R) - 2H_1$ ， $e = (b - r + R)^2 + H_1^2 - L^2$ 。

$$\chi = \frac{-f + \sqrt{f^2 - 4(h^2 - g^2)}}{2(h - g)} \quad (21)$$

$$\theta = \arctan \chi$$

式中： $f = 2r(H_2 - z)$ ； $g = -2rR$ ； $h = -L^2 + R^2 + r^2 + y^2 + (z + H_2)^2$ 。

对式 (19—21) 求解，即可求得动平台的位置姿态 θ, y, z 。

2.3 正反解运动算例分析

设并联机构的机构参数为 $R=590$ ， $r=130$ ， $L=780$ 。假设已知动平台的位置参数为 $y=100$ ， $z=790$ ， $\theta=\pi/6$ 时，由式 (1) 求出并联机构的所有位置反解，结果见表 1，表中第 1 组解为式 (1) 的“±”全部取负号。

在实际应用中只会出现第 1 组解的情况，将位置反解所求的 H_1, H_2, H_3 位置解第 1 组作为输入值，带入式 (1)，(20)，(21) 可得并联机构位置正解，结果见表 2。根据 Matlab 软件将表 2 得出的数据编程绘制并联机构的位置姿态图，见图 4。

表 1 并联机构的位置反解值			
Tab.1 Inverse position solution of parallel mechanism			
序号	H_1	H_2	H_3
1	247.0451	98.0462	116.3348
2	247.0451	1482.00	116.3348
3	247.0451	98.0642	1333.700
4	247.0451	1482.00	1333.700
5	1333.00	98.0462	116.3348
6	1333.00	1482.00	116.3348
7	1333.00	98.0642	1333.700
8	1333.00	1482.00	1333.700

表 2 并联机构的位置正解值			
Tab.2 Forward position solution of parallel mechanism			
序号	y	z	θ
1	100.0028	790.0169	0.5329
2	-100.0012	790.0169	1.1792
3	100.0028	790.0169	1.1792
4	-100.0012	790.0169	0.5329
5	100.0028	-444.9157	-1.9356
6	-100.0012	-444.9157	0.4148
7	100.0028	-444.9157	0.4148
8	-100.0012	-444.9157	-1.9356

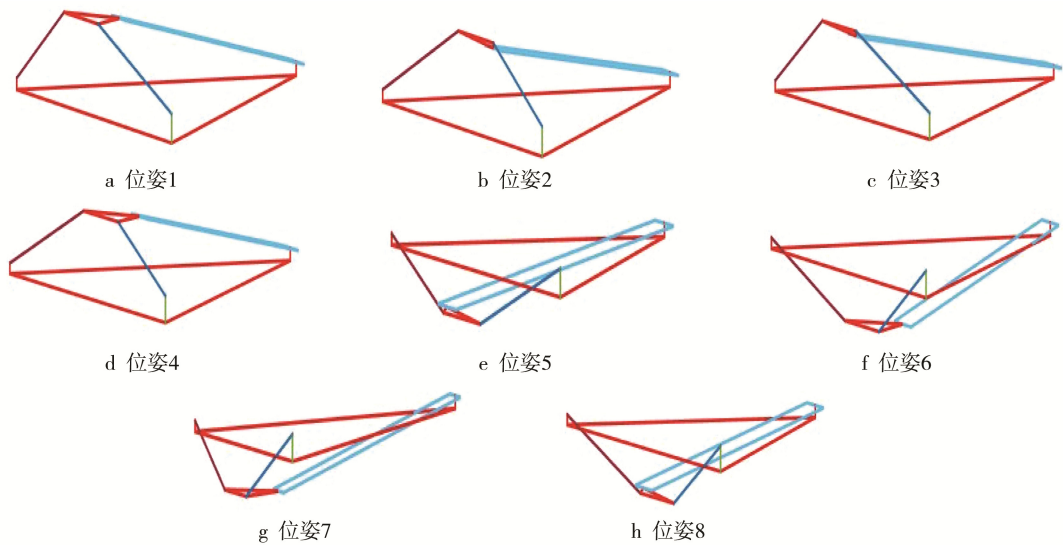


图 4 并联机构位置正解的位置姿态
Fig.4 Positional attitude of the forward position solution of the parallel mechanism

由表 1 和表 2 数据对比可得，第 1 组正反解数值完全对应，验证了正反解求解过程及结果的正确性。

3 工作空间分析

并联机构的可达工作空间是指动平台上一点位置在运行时可达到的空间区域。文中提出的并联机构动平台上一点[0,0,Z]在定坐标系 $O\text{-}xyz$ 下的位置表示为：

$$G = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = RG' + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z\sin\theta \\ y \\ -Z\cos\theta + z \end{bmatrix} \tag{22}$$

在所有条件和结构参数已知的情况下，依据位置反解等式 (17) 和约束条件，通过 Matlab 进行编程

进而求解所有能到达的位置点，这些点的集合就是并联机构所能到达的工作空间。据上文计算思路 and 思想并根据三维坐标搜索法^[11—15]画出单支链闭环球铰并联机构的工作空间，搜索参数见表 3。工作空间见图 5。

表 3 空间搜索参数极值范围		
Tab.3 Limit range of spatial search parameters		
参数项	数值	初始数值及范围
沿 x 轴方向的搜索范围/mm	0	$Y \in [-300, 300]$
沿 y 轴方向的搜索范围/mm	0	$Y \in [-300, 300]$
沿 z 轴方向的搜索范围/mm	0	$Z \in [0, 2000]$
姿态角 $\phi/(^{\circ})$	0	$\varphi \in [-10, 10]$
姿态角 $\theta/(^{\circ})$	0	$\theta \in [-60, 100]$
姿态角 $\psi/(^{\circ})$	0	$\psi \in [-60, 60]$

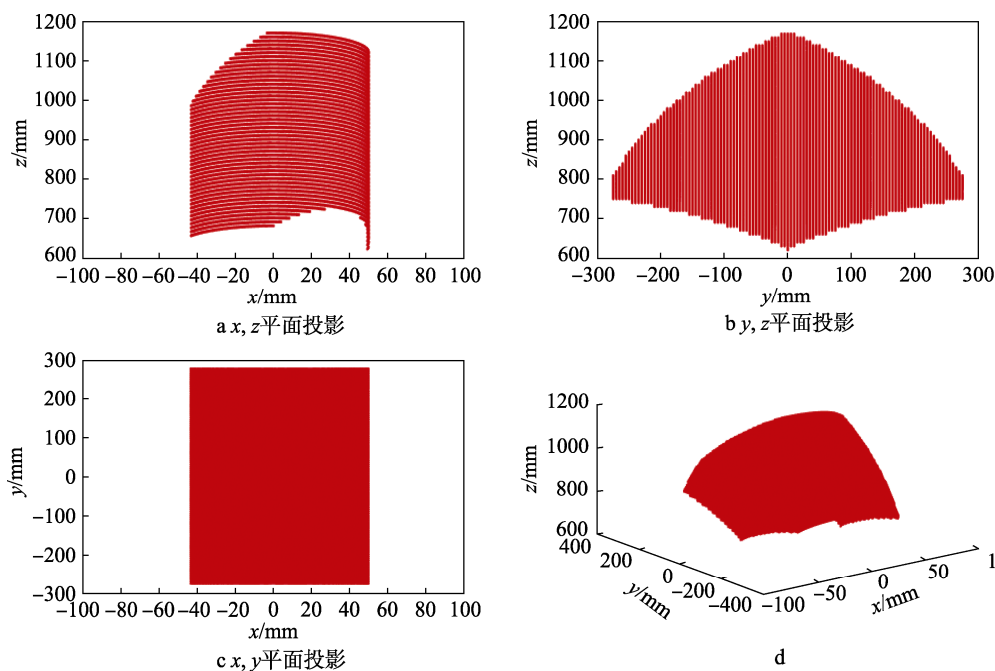


图5 并联机构工作空间

Fig.5 Working space of the parallel mechanism

从图5中可以看出,此并联机构在约束参数范围内的工作空间连续稳定且没有出现空洞,这说明了所设计单支链闭环球铰并联机构在工作空间内的运动没有奇异位置,运动比较稳定,具有良好的运动性能。

4 结语

文中提出的单支链含有球铰闭环的空间三自由度并联机构约束少、解耦计算方便,应用了闭环球铰结构,具有非对称并联机构的优点,有沿 y 、 z 方向的移动和绕 y 轴的转动。文中用定杆长约束条件得到了其位置反解表达式,用正反解算例验证了其正确性,分析了其工作空间,证明运动性能稳定,因此这种并联机构可以广泛应用在工业机器人和并联机床等领域。

参考文献:

- [1] 冯李航, 张为公, 龚宗洋, 等. Delta系列并联机器人研究进展与现状[J]. 机器人, 2014, 36(3): 375—384.
FENG Li-hang, ZHANG Wei-gong, GONG Zong-yang, et al. Research Progress and Present Situation of Delta Series Parallel Robots[J]. Robots, 2014, 36(3): 375—384.
- [2] AMINHOSEINI M, DANIALI H R, TAGHIRAD H. Dexterous Workspace Optimization of a Tricept Parallel Manipulator[J]. Advanced Robotics, 2011, 25: 13—14.
- [3] LIU H T, HUANG T, ZHAO X M, et al. Optimal De-

sign of the Trivariant Robot to Achieve a Nearly Axial Symmetry of Kinematic Performance[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 42(12): 1643—1652.

- [4] 胡少刚, 曹毅. 非对称式6/6-SPS型Stewart并联机构位置正解的研究[J]. 机械设计, 2010, 27(12): 57—62.
HU Shao-gang, CAO Yi. Study on the Positive Solution of Asymmetric 6/6-SPS Stewart Parallel Mechanism[J]. Machinery Design, 2010, 27(12): 57—62.
- [5] 石明. 非对称3-P-(2SS)并联机构的研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨商业大学, 2015.
SHI Ming. Research on Asymmetric 3-P-(2SS) Parallel Mechanism[D]. Harbin: Harbin University of Commerce, 2015.
- [6] 李辉, 宋诗. 五自由度摇摆台位置正解方法研究及MATLAB实现[J]. 机床与液压, 2013, 41(7): 36—39.
LI Hui, SONG Shi. Research on Positive Solution Method of Five Degrees of Freedom Swing Table and MATLAB Realization[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2013, 41(7): 36—39.
- [7] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
HUANG Zhen, ZHAO Yong-sheng, ZHAO Tie-shi. Higher Space Institutions[M]. Beijing: Higher Education Press, 2014.
- [8] 李虹, 胡洋, 李瑞琴, 等. 一种新型并联机构2-RPU/UPU位置逆解及工作空间分析[J]. 机械传动, 2017, 41(6): 115—118.
LI Hong, HU Yang, LI Rui-qin, et al. Positional Inverse Solution and Workspace Analysis of a New Type of Parallel Mechanism 2-RPU/UPU[J]. Journal of Me-

- chanical Transmission, 2017, 41(6): 115—118.
- [9] 李俊帅, 马春生, 李瑞琴, 等. 3-PUPU 并联机构的运动学与工作空间分析[J]. 包装工程, 2017(11): 123—128.
LI Jun-shuai, MA Chun-sheng, LI Rui-qin, et al. Kinematics and Workspace Analysis of 3-PUPU Parallel Mechanism[J]. Packaging Engineering, 2017(11): 123—128.
- [10] EL-KHASAWNEH B S, FERREIRA P M. Computation of Stiffness and Stiffness Bounds for Parallel Link Manipulators[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 1999, 39(2): 321—342.
- [11] GAO F, PENG B, ZHAO H, et al. A Novel 5-DOF Fully Parallel Kinematic Machine Tool[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2006, 31(1): 201—207.
- [12] WANG J, GOSSELIN C M. Static Balancing of Spatial Four-degree-of-freedom Parallel Mechanisms[J]. Mechanism & Machine Theory, 2000, 35(4): 563—592.
- [13] 刘小娟, 李虹, 汪辉, 等. 3-RRP 平面并联机构的工作空间和灵巧度分析[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2016, 42(4): 523—526.
LIU Xiao-juan, LI Hong, WANG Hui, et al. Workspace and Dexterity Analysis of 3-RRP Planar Parallel Mechanism[J]. Journal of Donghua University (Natural Science), 2016, 42(4): 523—526.
- [14] 郑仁成. 5-UPS/PRPU 并联机床的冗余驱动研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2006.
ZHENG Ren-cheng. Research on Redundant Drive of 5-UPS/PRPU Parallel Machine Tool[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2006.
- [15] 雷静桃, 曹元龙, 王峰. 基于边界搜索法的 4UPS-UPU 并联机构工作空间分析[J]. 机械设计与研究, 2013, 29(1): 5—9.
LEI Jing-tao, CAO Yuan-long, WANG Feng. Workspace Analysis of 4UPS-UPU Parallel Mechanism Based on Boundary Search Method[J]. Mechanical Design and Research, 2013, 29(1): 5—9.