

# 正切型缓冲系统跌落冲击响应分析的 NHB 方法

赵晓兵<sup>1</sup>, 杜兴丹<sup>2</sup>, 陈安军<sup>2,3</sup>

(1. 无锡市计量测试院, 无锡 214101; 2. 江南大学 机械工程学院, 无锡 214122;  
3. 国家轻工业包装制品质量监督检测中心, 无锡, 214122)

**摘要:** **目的** 为了获得正切型缓冲系统跌落冲击响应的近似解析解。**方法** 将正切型系统简化为 3 次、5 次非线性系统, 经无量纲处理后获得无量纲动力学方程, 应用牛顿谐波平衡法求解系统无量纲动力学方程, 得到跌落冲击响应一阶、二阶近似解析解, 并获得系统位移响应最大值、加速度响应最大值以及跌落冲击持续时间等重要参数的解析表达式。**结果** 通过算例分析表明, 牛顿谐波平衡法二阶近似解与龙格-库塔数值解接近, 相对误差控制在 2% 以内。**结论** 牛顿谐波平衡法为非线性缓冲系统跌落冲击响应分析提供了一种新的有效解析方法。

**关键词:** 牛顿谐波平衡; 非线性; 分析解; 位移最大值; 加速度最大值; 跌落冲击时间

**中图分类号:** TB485.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2019)07-0046-05

**DOI:** 10.19554/j.cnki.1001-3563.2019.07.007

## NHB Method for Analyzing Dropping Shock Response of Cushion Packaging System with Tangent Nonlinearity

ZHAO Xiao-bing<sup>1</sup>, DU Xing-dan<sup>2</sup>, CHEN An-jun<sup>2,3</sup>

(1. Wuxi Institute of Metrology and Testing, Wuxi 214101, China; 2. School of Mechanical Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 3. China National Control and Testing Center for Packaging Quality, Wuxi 214122, China)

**ABSTRACT:** The aim of this work is to analyze and get the approximate analytical solutions for dropping shock response of cushion packaging system with tangent nonlinearity. The tangent system was simplified to the cubic-quintic nonlinear system to obtain the dimensionless dynamic equation after dimensionless treatment. The Newton-harmonic balancing method was used to obtain the first-order and the second-order analytical solutions of dropping shock response to the non-dimensional dynamic equation, and the analytical expressions of important parameters including the maximum displacement, the maximum acceleration of the system response and the dropping shock duration. The example analysis showed that the second order approximate solutions of the NHB method were very similar to those obtained from the Runge-Kutta method. The relative error was controlled within 2%. The newton-harmonic balancing method provides a new effective solution method for dropping shock response analysis of nonlinear packaging system.

**KEY WORDS:** newton-harmonic balancing; nonlinear; analytical solution; maximum displacement; maximum acceleration; dropping shock duration

工程应用中大量的非线性问题, 可以用非线性微分方程描述。为揭示问题的内在规律, 需对非线性微

分方程进行求解, 由于非线性的复杂性, 通常使用数值分析方法获得数值解。对于非线性系统跌落冲击问

收稿日期: 2018-12-06

作者简介: 赵晓兵 (1971—), 男, 高级工程师, 主要研究方向为系统动态特性。

通信作者: 陈安军 (1962—), 男, 江南大学教授, 主要研究方向为包装动力学、机械系统动态性能分析。

题,通常关注的重要参数如系统位移响应最大值、加速度响应最大值以及跌落冲击持续时间等,难以获得解析表达式。部分非线性问题可通过近似分析获得解析解,近年来非线性问题的近似分析方法,如伦摄动法(HPM)<sup>[1-2]</sup>、变分迭代法(VIM)<sup>[3-4]</sup>、何氏频率-振幅关系(HFAF)<sup>[5-7]</sup>、能量平衡法(EBM)<sup>[8-9]</sup>以及何氏参数展开<sup>[10-12]</sup>(PEM)法等得到了发展及应用。非线性问题的解析分析更多关注系统的位移响应及周期,而非线性包装系统跌落冲击损伤评价关注的重要参数是系统位移响应最大值、加速度响应最大值以及跌落冲击持续时间等。应用以上近似分析方法时,可能出现较大的误差,需用能量法进行校正<sup>[13-18]</sup>,校正后虽可获得满意的精度,但在一定程度上使分析过程复杂化。

对于非线性保守系统,Wu<sup>[19-23]</sup>等将牛顿线性化方法与谐波平衡法相结合,提出了一种新的非线性分析方法——牛顿谐波平衡法(NHB),该方法不仅可以避免单独使用谐波平衡法时求解复杂非线性代数方程组的问题,不依赖于小参数,且对强非线性系统振动问题进行分析时可获得满意的精度。文中拟将HNB法应用于一种典型的非线性包装系统——正切型缓冲系统,讨论系统跌落冲击响应,获得位移最大值、加速度最大值以及跌落冲击时间等重要参数的解析表达,并将结果与龙格-库塔(R-K)数值解比较,验证NHB方法的有效性。

## 1 动力学方程及无量纲化

对于无阻尼正切缓冲包装系统,取其静平衡位置为坐标原点,向下为正,跌落冲击动力学方程及初始条件为:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k_0 \frac{d_b}{\pi} \tan \frac{\pi x}{2d_b} = 0 \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

式中: $m$ 为产品质量; $x$ 为产品位移(缓冲材料变形); $k_0$ 和 $d_b$ 分别为缓冲材料初始弹性系数及压缩极限; $g$ 为重力加速度; $h$ 为跌落高度。记系统参数 $L=2d_b/\pi$ ,频率参数 $\omega=\sqrt{k_0/m}$ ,周期参数 $T=1/\omega$ ,引入无量纲位移 $y=x/L$ ,无量纲时间 $\tau=t/T$ ,则系统无量纲动力学方程为:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \tan y = 0 \quad (3)$$

为讨论问题方便,非线性项使用泰勒级数展开。在小位移条件下,近似无量纲动力学方程及初始条件分别为:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + ay + by^3 + cy^5 = 0 \quad (4)$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = v = \frac{T}{L} \sqrt{2gh} \quad (5)$$

式中: $a=1$ ;  $b=1/3$ ;  $c=2/15$ ;  $v$ 为无量纲初始速度。

## 2 基于NHB近似解

引入 $\tau_1 = \omega\tau$ 作为新变量,动力学方程式(4)变为:

$$\omega^2 \frac{d^2 y}{d\tau_1^2} + ay + by^3 + cy^5 = 0 \quad (6)$$

式中: $\omega^2 = \Omega$ ;  $\omega_1^2 = \Omega_1$ ;  $\Delta\omega_1^2 = \Delta\Omega_1$ 。应用牛顿线性化法,位移和频率分别表示为:

$$y = y_1 + \Delta y_1 \quad (7)$$

$$\Omega = \Omega_1 + \Delta\Omega_1 \quad (8)$$

式(7)、(8)代入方程(6),略去高阶小量,有:

$$(\Omega_1 + \Delta\Omega_1) \frac{d^2 y_1}{d\tau_1^2} + \Omega_1 \frac{d^2 \Delta y_1}{d\tau_1^2} + ay_1 + by_1^3 + cy_1^5 + (a + 3by_1^2 + 5cy_1^4) \Delta y_1 = 0 \quad (9)$$

为满足初始条件式(5),初始逼近解可选为:

$$y_1 = A \sin \tau_1 \quad (10)$$

式中: $A$ 为未知参数。将式(10)代入方程(9),有:

$$-(\Omega_1 + \Delta\Omega_1) \sin \tau_1 + \Omega_1 \frac{d^2 \Delta y_1}{d\tau_1^2} + a \sin \tau_1 + bA^3 \sin^3 \tau_1 + cA^5 \sin^5 \tau_1 + (a + 3b \sin^2 \tau_1 + 5cA^4 \sin^4 \tau_1) \Delta y_1 = 0 \quad (11)$$

由于式(12),并将其代入式(11)可得式(13)。

$$\sin^3 \tau_1 = (3 \sin \tau_1)/4 - (\sin 3\tau_1)/4$$

$$\sin^5 \tau_1 = (5 \sin \tau_1)/8 - (5 \sin 3\tau_1)/16 + (\sin 5\tau_1)/16 \quad (12)$$

$$\left[ (-\Omega_1 - \Delta\Omega_1 + a)A + 3bA^3/4 + 5cA^5/8 \right] \sin \tau_1 -$$

$$(bA^3/4 + 5cA^5/16) \sin 3\tau_1 + (cA^5/16) \sin 5\tau_1 +$$

$$\Omega_1 \frac{d^2 \Delta y_1}{d\tau_1^2} + (a + 3bA^2 \sin^2 \tau_1 + 5cA^4 \sin^4 \tau_1) \Delta y_1 = 0$$

(13)

为获得一阶近似解,令 $\Delta y_1=0$ , $\Delta\Omega_1=0$ ,并代入式(13),整理并令 $\sin(\tau_1)$ 系数为零,并代入式(14)。

$$(-\Omega_1 + a)A + 3bA^3/4 + 5cA^5/8 = 0 \quad (14)$$

式中: $A$ 为未知参数。

一阶近似解频率及无量纲位移分别为:

$$\omega_1 = \sqrt{\Omega_1} = \sqrt{a + 3bA^2/4 + 5cA^4/8} \quad (15)$$

$$y_1 = A \sin(\sqrt{a + 3bA^2/4 + 5cA^4/8}\tau) \quad (16)$$

为获得二阶近似解,位移增量设为:

$$\Delta y_1 = c_1 (\sin \tau_1 - (\sin 3\tau_1)/3) \quad (17)$$

式中: $c_1$ 为待定常数,代入式(13),经整理展开为三角级数表达式。为确定 $c_1$ 及 $\Delta\Omega_1$ ,整理后表达式中 $\sin(\tau_1)$ 及 $\sin(3\tau_1)$ 系数设为零,联立式(15),得:

$$c_1 = \frac{3(4bA^3 + 5cA^5)}{128a + 48bA^2 - 15cA^4} \quad (18)$$

$$\Delta\Omega_1 = (9bA/4 + 145cA^3/48)c_1 \quad (19)$$

二阶近似解的频率及无量纲位移分别为：

$$\omega_2 = \sqrt{\Omega_2} = \sqrt{\Omega_1 + \Delta\Omega_1} =$$

$$\sqrt{a + 3bA^2/4 + 5cA^4/8 + (9bA/4 + 145cA^3/48)c_1} \quad (20)$$

$$y_2(\tau) = (A + c_1)\sin(\omega_2\tau) - c_1(\sin(3\omega_2\tau))/3 \quad (21)$$

与之对应的无量纲速度及加速度分别为：

$$\frac{dy_2}{d\tau} = (A + c_1)\omega_2\cos(\omega_2\tau) - c_1\omega_2\cos(3\omega_2\tau) \quad (22)$$

$$\frac{d^2y_2}{d\tau^2} = -(A + c_1)\omega_2^2\sin(\omega_2\tau) + 3c_1\omega_2^2\sin(3\omega_2\tau) \quad (23)$$

当  $\omega_2\tau = \pi/2$  时, 由式 (21), (23) 得无量纲位移、加速度最大值如下：

$$y_{2\max} = A + 4c_1/3 \quad (24)$$

$$\left(\frac{d^2y_2}{d\tau^2}\right)_{\max} = (A + 4c_1)\omega_2^2 \quad (25)$$

跌落冲击持续时间为：

$$t = \pi/\omega_2 \quad (26)$$

由初始条件 (5) 及式 (20), (22) 得：

$$A\sqrt{a + 3bA^2/4 + 5cA^4/8 + (9bA/4 + 145cA^3/48)c_1} = v \quad (27)$$

将式 (18) 代入式 (27), 当跌落冲击初始条件给定时, 可确定未知参数  $A$ 。若二阶近似解不满足误差要求时, 采取同样的分析方法可获得三阶近似解。

### 3 算例分析

为评价 NHB 近似解的有效性, 当无量纲跌落冲击速度  $v=1.50$  时, R-K, NHB 法获得的系统无量纲位移、加速度响应分别见图 1—2, 图 1—2 中 R-K 表示龙格-库塔数值分析结果, F 表示 NHB 一阶近似解,

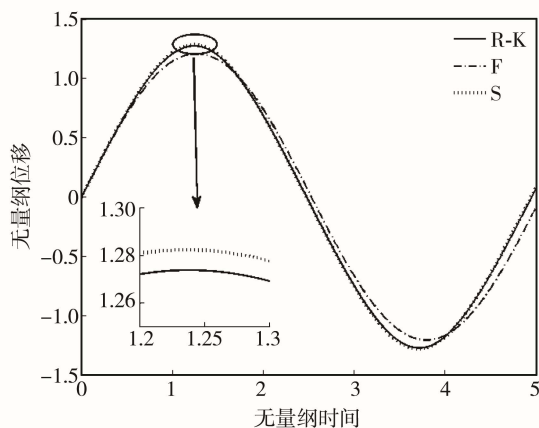


图 1 无量纲位移响应

Fig.1 Dimensionless displacement response

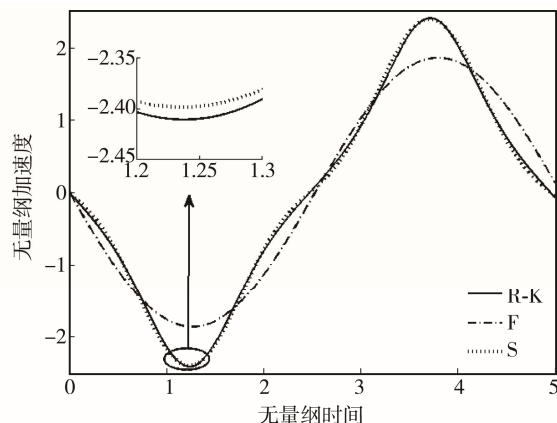


图 2 无量纲加速度响应

Fig.2 Dimensionless acceleration response

S 表示 NHB 二阶近似解；当无量纲跌落冲击速度分别取 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 1.75 及 2.00 时, R-K, NHB 法获得的无量纲最大位移、最大加速度以及跌落冲击持续时间见表 1—3, 表 1—3 中 NHBF, NHBS 分别表示 NHB 一阶、二阶结果, RE 表示 NHB 一阶或二阶解析解与 R-K 数值解的相对误差。

由图 1—2、表 1—3 可知, NHB 获得的二阶近似

表 1 无量纲位移响应最大值比较  
Tab.1 Comparison of dimensionless maximum displacement

| v    | R-K    | 一阶     |      | 二阶     |      |
|------|--------|--------|------|--------|------|
|      |        | NHBF   | RE/% | NHBS   | RE/% |
| 0.50 | 0.4896 | 0.4847 | 1.00 | 0.4896 | 0.00 |
| 0.75 | 0.7161 | 0.7015 | 2.04 | 0.7164 | 0.04 |
| 1.00 | 0.9229 | 0.8935 | 3.19 | 0.9243 | 0.15 |
| 1.25 | 1.1086 | 1.0613 | 4.27 | 1.1125 | 0.35 |
| 1.50 | 1.2740 | 1.2079 | 5.19 | 1.2825 | 0.67 |
| 1.75 | 1.4213 | 1.3370 | 5.93 | 1.4372 | 1.12 |
| 2.00 | 1.5532 | 1.4518 | 6.53 | 1.5792 | 1.67 |

表 2 无量纲加速度响应最大值比较  
Tab.2 Comparison of dimensionless maximum acceleration

| v    | R-K    | 一阶     |       | 二阶     |      |
|------|--------|--------|-------|--------|------|
|      |        | NHBF   | RE/%  | NHBS   | RE/% |
| 0.50 | 0.5324 | 0.5155 | 3.17  | 0.5322 | 0.04 |
| 0.75 | 0.8635 | 0.8019 | 7.13  | 0.8619 | 0.19 |
| 1.00 | 1.2743 | 1.1192 | 12.17 | 1.2691 | 0.41 |
| 1.25 | 1.7861 | 1.4723 | 17.57 | 1.7759 | 0.57 |
| 1.50 | 2.4105 | 1.8627 | 22.73 | 2.3982 | 0.51 |
| 1.75 | 3.1518 | 2.2906 | 27.32 | 3.1470 | 0.15 |
| 2.00 | 4.0078 | 2.7549 | 31.26 | 4.0311 | 0.58 |

表 3 跌落冲击持续时间比较  
Tab.3 Comparison of dropping shock duration

| $\nu$ | R-K    | 一阶     |      | 二阶     |      |
|-------|--------|--------|------|--------|------|
|       |        | NHBF   | RE/% | NHBS   | RE/% |
| 0.50  | 3.0448 | 3.0465 | 0.06 | 3.0448 | 0.00 |
| 0.75  | 2.9307 | 2.9383 | 0.26 | 2.9306 | 0.00 |
| 1.00  | 2.7876 | 2.8069 | 0.69 | 2.7870 | 0.02 |
| 1.25  | 2.6316 | 2.6673 | 1.36 | 2.6300 | 0.06 |
| 1.50  | 2.4769 | 2.5298 | 2.14 | 2.4730 | 0.16 |
| 1.75  | 2.3322 | 2.4002 | 2.92 | 2.3241 | 0.35 |
| 2.00  | 2.1996 | 2.2807 | 3.69 | 2.1868 | 0.58 |

解析解与龙格-库塔数值分析结果接近。无量纲位移响应最大值的相对误差控制在 2%以内，无量纲加速度响应最大值、跌落冲击持续时间的相对误差在 1%之内；随着无量纲跌落冲击速度的增加，NHB 二阶解析解获得的无量纲最大位移、最大加速度以及跌落冲击时间的相对误差均逐渐增大，表明系统响应对初始条件较为敏感。

4 结语

对于正切非线性缓冲系统跌落冲击动力学问题，通过 NHB 方法可以获得系统位移响应、加速度响应的近似解析表达，且非线性微分方程求解演变为代数方程，其分析过程相对简单。

由 NHB 方法获得的系统位移响应最大值、加速度响应最大值等跌落冲击评价关注的重要参数，其解析表达有利于系统跌落破损评价方程的构建。

与近似动力学方程的龙格-库塔法数值分析结果相比，NHB 法的系统位移响应、加速度响应最大值以及跌落冲击时间等相对误差可满足要求。但也应注意，当系统无量纲位移超过 1.2，与原始动力学方程 (3) 的数值解相比，近似动力学方程 (4) 获得的最大位移或最大加速度误差均超过了 5%。解决方案有 2 种：泰勒级数展开保留更高次项；采用数据拟合方法确定近似动力学方程，拟合时注意数据点的选择及拟合函数要满足奇函数的性质。

参考文献：

[1] HE J H. The Homotopy Perturbation Method for Non-linear Oscillators with Discontinuities[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 151(1): 287—292.

[2] RAFEI M, GANGI D D, DANIALI H. Solution of the Epidemic Model by Homotopy Perturbation Method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 187(2):

1056—1062.

[3] HE J H, WU X H. Variational Iteration Method: New Development and Applications[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 54(7/8): 881—894.

[4] HE J H. Variational Iteration Method-some Recent Results and New Interpretation[J]. Journal of Computation and Applied Mathematics, 2007, 207(1): 3—17.

[5] HE J H. Comment on He's Frequency Formulation for Nonlinear Oscillators[J]. European Journal of Physics, 2008, 29(4): 1—4.

[6] HE J H. An Improved Amplitude-frequency Formulation for Nonlinear Oscillators[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2008, 9(2): 211—212.

[7] HE J H. Comment on He's Frequency Formulation for Nonlinear Oscillators[J]. European Journal of Physics, 2008, 29: L19—L22.

[8] MEHDIPOUR I, GANGI D D, MOZAFFARI M. Application of the Energy Balance Method to Nonlinear Vibrating Equations[J]. Current Applied Physics, 2010, 10: 104—112.

[9] ZHANG H L. Periodic Solutions for Some Strongly Nonlinear Oscillations by He's Energy Balance Method[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 58: 2480—2485.

[10] HE J H. Modified Lindstedt-poincare Methods for Some Strongly Non-linear Oscillations: Part I: Expansion of a Constant[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2002, 37(2): 309—314.

[11] ZENGIN F, KAYA O, DEMIRBA S A. Approximate Period Calculation for Some Strongly Nonlinear Oscillation by He's Parameter-expanding Methods[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(4): 2177—2182.

[12] SHOU D H, HE J H. Application of Parameter-expanding Method to Strongly Nonlinear Oscillators[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2007, 8(1): 121—124.

[13] 陈安军. 非线性包装系统跌落冲击问题变分迭代法[J]. 振动与冲击, 2013, 32(18): 105—107.

CHEN An-jun. Variational Iteration Method for Dropping Shock Problem of a Cubic Non-linear Packaging System[J]. Journal of Vibration and Shock[J]. 2013, 32(18): 105—107.

[14] CHEN A J. Application of Variational Iteration Method with Energy Method for Nonlinear Equation Arisen from Packaging System[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013: 326239.

[15] 陈鸣, 陈安军. 非线性包装系统跌落冲击响应分析的 HFAF 法[J]. 包装工程, 2014, 35(15): 40—43.

CHEN Ming, CHEN An-jun. He's Frequency-amplitude Formulation Method for Analyzing Dropping Shock Response of Cubic Nonlinear Packaging Sys-

- tem[J]. Packaging Technology and Science, 2014, 35(15): 40—43.
- [16] 宋浩, 李宏卫. 正切型非线性包装系统跌落冲击响应分析的何氏 PEM 与修正[J]. 包装工程, 2016, 37(1): 11—14.
- SONG Hao, LI Hong-wei. Correction of He's Parameter-expanding Method for Analyzing Dropping Shock Response of Tangent Nonlinear Packaging System[J]. Packaging Technology and Science, 2016, 37(1): 11—14.
- [17] 李宏卫, 王军. 三次型非线性包装系统跌落冲击响应分析[J]. 包装工程, 2015, 36(19): 18—22.
- LI Hong-wei, WANG Jun. Dropping Shock Response Analysis of a Cubic Nonlinear Packaging System[J]. Packaging Technology and Science, 2015, 36(19): 18—22.
- [18] HONG X, WANG J, LU L X. Application of Homotopy Perturbation Method with an Auxiliary Term for Non-linear Dropping Equations Arisen in Polymer Packaging System[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013: 982859.
- [19] WU B S, SUN W P, LIM C W. An Analytical Approximate Technique for a Class of Strongly Nonlinear Oscillators[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2006, 41(6/7): 766—774.
- [20] LAI S K, LI C W, WU B S, et al. Newton-harmonic Balancing Approach for Accurate Solutions to Nonlinear Cubic-quintic Duffing Oscillators[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33: 850—866.
- [21] WU B S, LIM C W, SUN W P. Improved Harmonic Balance Approach to Periodic Solutions of Non-linear Jerk Equations[J]. Physics Letters A, 2006, 354(1/2): 95—100.
- [22] SUN W P, WU B S. Accurate Analytical Approximate Solutions to General Strong Nonlinear Oscillators[J]. Nonlinear Dynamics, 2008, 51: 277—287.
- [23] WU B S, LIU W J, CHEN X, et al. Asymptotic Analysis and Accurate Approximate Solutions for Strongly Nonlinear Conservative Symmetric Oscillators[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 49: 243—254.