缓冲与隔振

多级刚性包装运输系统间接逆向子结构分析

李明宇[1]，王军[1,2]，卢立新[1,2]，王鹏涛[1]
（1.江南大学 机械工程学院，无锡 214122；
2.江苏省食品先进制造装备技术重点实验室，无锡 214122）

摘要：目的 针对各子部件耦合界面之间的系统水平频响函数难以测量，刚性耦合系统逆向子结构分析方法无法顺利应用的情况，提出多级系统间接分析方法。**方法** 基于子结构理论，提出单点耦合和多点耦合系统的多级刚性耦合系统间接逆向子结构分析方法，然后建立相对应的集总参数模型，利用已知参数和公式获得部件频响函数直接计算值和预测值，最后将两者进行对比验证。**结果** 部件频响函数直接计算值与预测值相吻合，验证了方法的准确性。**结论** 提出的方法可为逆子结构理论在解决耦合界面频响函数难测问题时提供新思路，以及为在运输包装领域更广泛的应用提供更多的可能性。

关键词：运输包装；逆子结构；多级；刚性耦合
中图分类号：TB485.3 **文献标识码：**A **文章编号：**1001-3563(2019)09-0072-06
DOI：10.19554/j.cnki.1001-3563.2019.09.012

Indirectly Inverse Sub-structure for Multi-substructure Rigidly Coupled Packaging Transport System

LI Ming-yu[1], *WANG Jun*[1,2], *LU Li-xin*[1,2], *WANG Peng-tao*[1]
(1.School of Mechanical Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;
2.Jiangsu Key Laboratory of Advanced Food Manufacturing Equipment and Technology, Wuxi 214122, China)

ABSTRACT: The paper aims to propose an indirectly inverse sub-structuring method for multi-substructure system to solve the problems that the inverse sub-structuring method for rigidly can't be applied when system-level coupling interface FRFs are difficult to be measured. Based on the sub-structuring theory, an indirectly inverse sub-structuring method for multi-substructure system was proposed firstly. Then a corresponding lumped parameter model was established to obtain the directly calculated component-level FRF and predicted ones by known parameters and formulas. Finally, the results were compared. The predicted FRFs showed great agreement with directly calculated ones, which verified accuracy of the method. The proposed method can provide a new way for the inverse sub-structuring theory to solve the problem of the difficult-to-monitor coupling interface FRFs. It provides more possibilities in the wider application of the transportation packaging field.

KEY WORDS: packaging transport; inverse sub-structuring method; multi-substructure; rigidly coupled

完整的产品包装运输系统包含产品、包装、车辆等3部分，其中产品部分可能会因运输过程中道路复

收稿日期：2018-12-28
基金项目：国家一流学科建设轻工技术与工程（LITE 2018-29）；国家自然科学基金（51205167）；江苏省自然科学基金（BK20151128）
作者简介：李明宇（1994—），男，江南大学硕士生，主攻运输包装。
通信作者：王军（1982—），男，博士，江南大学教授、硕士生导师，主要研究方向为运输包装。

杂导致车辆振动而发生破损，因此十分有必要监测产品的质量与完整性。脆值研究[1—2]一直是包装领域的重要课题，其可指导产品包装如何更有效地去设计和应用，在王志伟等[3—7]不断完善之后，该理论体系被更多的研究人员熟知。不过现在越来越多的研究关注于在不拆卸系统的情况下如何获知产品的质量信息，国外已有相关仿真技术[8]可通过模拟道路车辆振动来探究内包装物的质量状况。不同于仿真技术，Wang[9]将逆子结构应用在产品包装运输系统，使用直接测量的频响函数预测产品破损情况，避免了复杂的建模过程和模态分析。逆子结构方法最初由 Lim[10]和 Zhen[11]提出，在机动车辆上完全利用测量获得的系统水平频响函数成功反求出各独立部件水平频响函数。不过逆子结构的准确合理划分以及耦合界面的精准离散化是目前较为重要的课题[12]，Wang[13—14]等对此进行了更深的探讨，积极推动了逆子结构理论在运输包装上的广泛利用。此外，逆子结构理论在不同耦合情况下也得到了新的发展[15—16]。很多产品包装运输系统中的各逆子结构互相耦合之后会造成两两之间的界面空间变得十分有限，或者逆子结构本身十分脆弱，使得无法准确通过正常的激振方式获取关键耦合界面处的频响函数，这俨然成为了逆子结构理论实际应用上的难题。在解决耦合界面频响函数难测量的问题上，虚拟质量法[16]、频响探针法[17]和间接分析法[18]的先后提出为逆子结构理论的发展提供了新思路。在虚拟质量法、频响探针法的应用过程中会存在添加质量块本身对系统整体结构的影响，实际中预测得到的结果会因附加质量的影响偏差较大，故建立无需耦合界面处频响函数的间接逆向子结构理论显得十分必要。虽已有许多研究将产品包装运输系统视作 2 级耦合系统，但考虑到系统的复杂性，将其视作 3 级或者多级进行探究有时更为适合。

在以上研究的启发下，文中拟针对 3 级刚性耦合产品包装运输系统进行更深的探究，其中包括单点耦合以及多点耦合系统。首先在多级系统耦合界面处频响函数较为难测的问题上提出了相应的间接逆子结构理论，此方法无需耦合界面处的频响函数，就可利用已知的部件水平频响函数以及易测量的系统水平频响函数预测出产品的动态特性。然后建立 2 种不同集总参数模型进行验证，将得到的预测值与直接计算值进行对比。

1　间接逆向子结构理论

二级刚性耦合系统示意见图 1，部件 A 与部件 B 共同构成了多点刚性耦合系统，图 1 中$\{\boldsymbol{F}_{\mathrm{i(A)}}\}$，$\{\boldsymbol{F}_{\mathrm{i(B)}}\}$表示外界输入激励向量，则$\{\boldsymbol{X}_{\mathrm{o(A)}}\}$，$\{\boldsymbol{X}_{\mathrm{o(B)}}\}$为系统响应向量，$\{\boldsymbol{F}_{\mathrm{c(A)}}\}$，$\{\boldsymbol{F}_{\mathrm{c(B)}}\}$表示耦合界面处的激励向量，则$\{\boldsymbol{X}_{\mathrm{c(A)}}\}$，$\{\boldsymbol{X}_{\mathrm{c(B)}}\}$则为系统耦合界面处的响应向量，$\{R_{\mathrm{c}(x)}\}$为耦合界面坐标处两部件之间产生的相互作用力，其中下标(A)，(B)分别表示部件 A 和 B，c 表示耦合界面。依据叠加原理可从系统中得出式（1）。

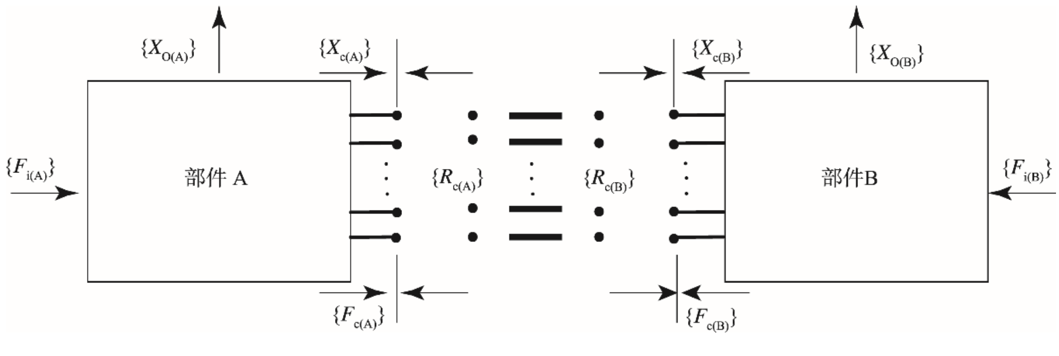


图 1　二级刚性耦合系统示意
Fig.1 Diagram of two-component rigidly coupled system

$$\{\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}\}=[\boldsymbol{H}_{\mathrm{F}}]\{\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}\}+[\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}]\{R\}_{\mathrm{c}(x)} \tag{1}$$

式中：$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{F}}]$为部件 A 或 B 的 FRF 矩阵；$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}]$为部件 A 和 B 之间耦合点处 FRF 矩阵；$\{\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}\}$为外部激励力矩阵；$\{R\}_{\mathrm{c}(x)}$为耦合界面坐标处两部件之间产生的相互作用力；$\{\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}\}$为包括部件 A、部件 B 以及部件 A，B 之间在耦合系统中耦合点的位移矩阵。耦合系统水平动态特性的计算公式可以写成以下形式。

$$\{\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}\}=\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{X}\}_{\mathrm{o(A)}}\\ \{\boldsymbol{X}\}_{\mathrm{c}(x)}\\ \{\boldsymbol{X}\}_{\mathrm{o(B)}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(A)i(A)}} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(A)c}(x)} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(A)i(B)}}\\ [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{i(A)}} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(x)} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{i(B)}}\\ [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(B)i(A)}} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(B)c}(x)} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{F}\}_{\mathrm{i(A)}}\\ \{\boldsymbol{F}\}_{\mathrm{c}(x)}\\ \{\boldsymbol{F}\}_{\mathrm{i(B)}}\end{Bmatrix} \tag{2}$$

FRF 矩阵$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{F}}]$，$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}]$可以拓展为：

$$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{F}}]=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{o(A)i(A)}} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{o(A)c}(x)} & 0\\ [\boldsymbol{H}_{x}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{i(A)}} & [\boldsymbol{H}_{x}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(x)} & [\boldsymbol{H}_{x}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{i(B)}}\\ 0 & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)c}(x)} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}\end{bmatrix} \tag{3}$$

$$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}]=\begin{bmatrix}\alpha[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{o(A)c(A)}}\\ [\boldsymbol{H}_{x}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(x)}\\ \beta\boldsymbol{H}_{\mathrm{o(B)c(B)}}\end{bmatrix} \tag{4}$$

式（1）中的其他矩阵可以写成：

$$\{\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}\}=\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{F}\}_{\mathrm{i(A)}}\\ \{\boldsymbol{F}\}_{\mathrm{c}(x)}\\ \{\boldsymbol{F}\}_{\mathrm{i(B)}}\end{Bmatrix} \tag{5}$$

$$\{R\}_{\mathrm{c}(x)}=[J]\Big[\alpha[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{c(A)i(A)}}\quad[\boldsymbol{H}_{\mathrm{X}}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(x)}\quad\beta[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c(B)i(B)}}\Big]\{\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}\} \tag{6}$$

$$\alpha=\begin{cases}1 & x=\mathrm{A}\\ -1 & x=\mathrm{B}\end{cases},\quad \beta=\begin{cases}1 & x=\mathrm{B}\\ -1 & x=\mathrm{A}\end{cases} \tag{7}$$

$$[J]=\left([\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{c(A)c(A)}}+[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c(B)c(B)}}\right)^{-1} \tag{8}$$

将式（2—8）代入式（1）得到：

$$\begin{bmatrix}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(A)i(A)}} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(A)c}(x)} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(A)i(B)}}\\ [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{i(A)}} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(x)} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{i(B)}}\\ [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(B)i(A)}} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(B)c}(x)} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{o(A)i(A)}} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{o(A)c}(x)} & 0\\ [\boldsymbol{H}_{x}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{i(A)}} & [\boldsymbol{H}_{x}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(x)} & [\boldsymbol{H}_{x}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{i(B)}}\\ 0 & [\boldsymbol{H}_{B}]_{\mathrm{o(B)c}(x)} & [\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}\end{bmatrix}- \tag{9}$$
$$\begin{bmatrix}\alpha[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{o(A)c(A)}}\\ [\boldsymbol{H}_{x}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(x)}\\ \beta[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)c(B)}}\end{bmatrix}[J]\cdot$$
$$\Big[\alpha[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{c(A)i(A)}}\quad[\boldsymbol{H}_{x}]_{\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(x)}\quad\beta[\boldsymbol{H}_{B}]_{\mathrm{c(B)i(B)}}\Big]$$

取式（9）中一项可以得到：

$$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}=[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}-[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)c(B)}}[J][\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c(B)i(B)}} \tag{10}$$

式（10）可转换为：

$$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)c(B)}}\left([\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{c(A)c(A)}}+[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c(B)c(B)}}\right)^{-1}$$
$$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c(B)i(B)}}=[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}-[\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}} \tag{11}$$

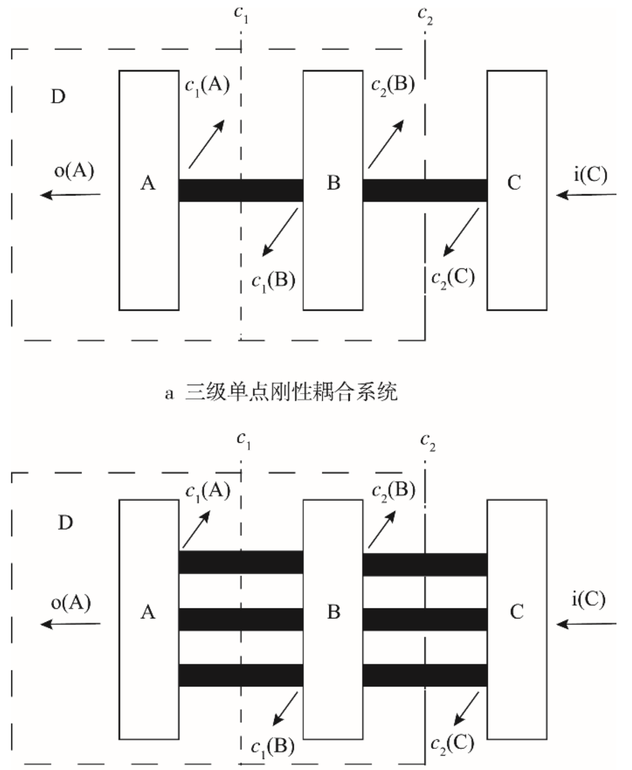
三级单点与三级多点刚性耦合系统见图 2，在由部件 A，B，C 组成的三级单点刚性耦合系统 S 中，部件 A 和 B 刚性耦合，耦合界面两端为 c_1(A)和 c_1(B)，B 和 C 刚性耦合，耦合界面两端为 c_2(B)和 c_2(C)。

1）在单点刚性产品包装运输系统中，式（11）具有以下形式。

$$\frac{\boldsymbol{H}_{\mathrm{B},o\mathrm{(B)c(B)}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{B,c(B)i(B)}}}{\boldsymbol{H}_{\mathrm{A,c(A)c(A)}}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{B,c(B)c(B)}}}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{B,o(B)i(B)}}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{S,o(B)i(B)}} \tag{12}$$

式（12）可变形为：

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{A,c(A)c(A)}}=\frac{\boldsymbol{H}_{\mathrm{B,o(B)c(B)}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{B,c(B)i(B)}}}{\boldsymbol{H}_{\mathrm{B,o(B)i(B)}}-\boldsymbol{H}_{S,\mathrm{o(B)i(B)}}}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{B,c(B)c(B)}} \tag{13}$$



a 三级单点刚性耦合系统

b 三级多点刚性耦合系统

图 2　三级单点与三级多点刚性耦合系统
Fig.2 Single-coordinate rigidly coupled three-sub-structure system and multi-coordinate rigidly coupled three-sub-structure system

如图 2a 所示，将部件 A 与部件 B 相互耦合而成的 D 视为独立存在的子结构，然后根据式（13）提供的单点刚性耦合系统逆向子结构理论，独立子结构 D 中部件 A 的频响函数（FRF）可以由部件 B 和子结构 D 的频响函数进行表示。

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{A},c_1\mathrm{(A)}c_1\mathrm{(A)}}=\frac{\boldsymbol{H}_{\mathrm{B},c_2\mathrm{(B)}c_1\mathrm{(B)}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{B},c_1\mathrm{(B)}c_2\mathrm{(B)}}}{\boldsymbol{H}_{\mathrm{B},c_2\mathrm{(B)}c_2\mathrm{(B)}}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{D},c_2\mathrm{(B)}c_2\mathrm{(B)}}}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{B},c_1\mathrm{(B)}c_1\mathrm{(B)}} \tag{14}$$

在实际情况当中，各个部件耦合成整体结构之后，每个耦合界面的频响函数都会因为界面处物理结构复杂，或者耦合界面存在脆弱结构将变得异常难以测量。从二级刚性耦合系统延伸至三级或者多级刚性耦合系统，耦合系统的部件数增加，因此不同部件间的耦合界面数目增加。独立子结构 D 再与部件 C 刚性连接成系统 S，根据式（13）提供的逆向子结构理论，子结构 D 的频响函数可以由部件 C 和系统 S 的 FRFs 进行表示。

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{D},c_2\mathrm{(B)}c_2\mathrm{(B)}}=\frac{\boldsymbol{H}_{\mathrm{C,o(C)}c_2\mathrm{(C)}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{C},c_2\mathrm{(C)i(C)}}}{\boldsymbol{H}_{\mathrm{C,o(C)i(C)}}-\boldsymbol{H}_{S,\mathrm{o(C)i(C)}}}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{C},c_2\mathrm{(C)}c_2\mathrm{(C)}} \tag{15}$$

将式（15）代入式（14）可得三级单点刚性耦合产品包装运输系统的间接逆向子结构公式。

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{A},c_1\mathrm{(A)}c_1\mathrm{(A)}}=\Big[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B},c_2\mathrm{(B)}c_1\mathrm{(B)}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{B},c_1\mathrm{(B)}c_2\mathrm{(B)}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{B},c_2\mathrm{(B)}c_2\mathrm{(B)}}-$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{H}_{\mathrm{C,o(C)c_2(C)}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{C,c_2(C)i(C)}}}{\boldsymbol{H}_{\mathrm{C,o(C)i(C)}}-\boldsymbol{H}_{S\mathrm{,o(C)i(C)}}}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{C,c_2(C)c_2(C)}}\right)\Bigg]^{-1}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{B,c_1(B)c_1(B)}} \tag{16}$$

2）在三级多点刚性耦合产品包装运输系统中，为了得到能计算$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{c(\mathrm{A})c(\mathrm{A})}$的预测公式，需要在等式左边和右边分别乘以$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]^{-1}{}_{\mathrm{o(B)}c\mathrm{(B)}}$和$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]^{-1}{}_{c\mathrm{(B)i(B)}}$。

$$\left([\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{c(A)c(A)}}+[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c(B)c(B)}}\right)^{-1}=[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)c(B)}}^{-1}\left([\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}-[\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}\right)[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c(B)i(B)}}^{-1} \tag{17}$$

$$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{c(A)c(A)}}=[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c(B)i(B)}}\left([\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}-[\boldsymbol{H}_{S}]_{\mathrm{o(B)i(B)}}\right)^{-1}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{o(B)c(B)}}-[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c(B)c(B)}} \tag{18}$$

如图 2b 所示，在由部件 A，B，C 组成的三级多点刚性耦合系统 S 中，部件 A 和 B 刚性耦合，耦合界面为 c_1(A)和 c_1(B)，B 和 C 刚性耦合，耦合界面为 c_2(B)和 c_2(C)。与三级单点刚性耦合产品包装运输系统相似，根据式（18）可知部件 A 的 FRF 可以由部件 B 和子结构 D 的 FRFs 进行表示。

$$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{c_1(A)c_1(A)}}=[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c_1(B)c_2(B)}}\left([\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c_2(B)c_2(B)}}-[\boldsymbol{H}_{\mathrm{D}}]_{\mathrm{c_2(B)c_2(B)}}\right)^{-1}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c_2(B)c_1(B)}}-[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c_1(B)c_1(B)}} \tag{19}$$

根据式（18）提供的逆向子结构理论，子结构 D 的频响函数可以由部件 C 和系统 S 的 FRFs 进行表示。

$$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{D}}]_{\mathrm{c_2(B)c_2(B)}}=[\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}]_{\mathrm{c_2(C)i(C)}}\left([\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}]_{\mathrm{o(C)i(C)}}-[\boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{o(C)i(C)}}\right)^{-1}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}]_{o\mathrm{(C)c_2(C)}}-[\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}]_{\mathrm{c_2(C)c_2(C)}} \tag{20}$$

将式（20）代入式（19）得到三级多点刚性耦合产品包装运输系统的间接逆向子结构公式。

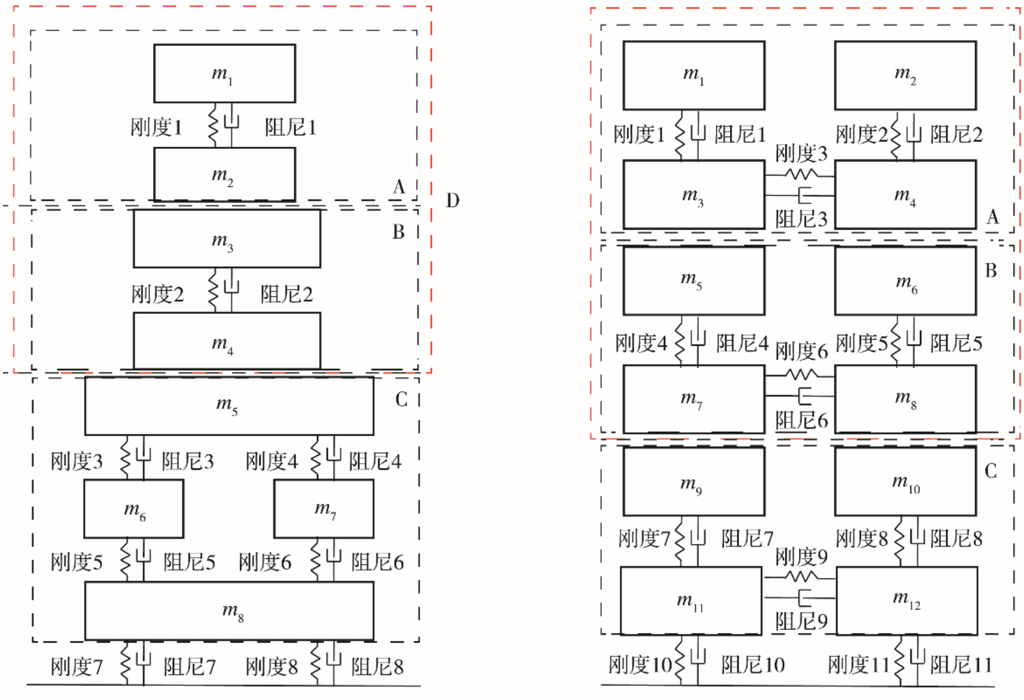
$$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}]_{\mathrm{c_1(A)c_1(A)}}=\Bigg[[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c_1(B)c_2(B)}}\cdot[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c_2(B)c_1(B)}}\cdot\\ [\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}]_{\mathrm{c_2(B)c_2(B)}}-\left(\frac{[\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}]_{\mathrm{c_2(C)i(C)}}\cdot[\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}]_{\mathrm{o(C)i(C)}}}{[\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}]_{\mathrm{o(C)i(C)}}-[\boldsymbol{H}_{S}]_{\mathrm{o(C)i(C)}}}-[\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}]_{\mathrm{c_2(C)c_2(C)}}\right)\Bigg]^{-1}-\\ [\boldsymbol{H}_{B}]_{\mathrm{c_1}(B)\mathrm{c_1}(B)} \tag{21}$$

2　数值验证

为验证理论的正确性，建立了 2 个集总参数模型，见图 3，其中用 m_1—m_{12} 表示不同的质量块，用不同刚度的弹性元件和不同阻尼的弹性元件连接不同的质量块。图 3a 模型用于验证式（16），图 3b 模型用于验证式（21），其中部件 A 代表着产品、部件 B 代表着包装、部件 C 代表着运输车辆、子结构 D 代表整体产品系统。

验证步骤如下所述。

1) 首先根据图 3 的集总参数模型预设系统参数矩阵。图 3a 中质量块 m_1—m_8 的质量依次为 3，5，4，4，7，3，4，10 kg，刚度件 1—8 的刚度依次为 35，25，40，19，34，26，36，36 kN/m，阻尼件 1—8 的阻尼依次为 3，2，4，5，3，2，4，4 Ns/m；图 3b 中



a 单点耦合　　　　　　　　　　b 多点耦合

图 3　多级系统集总参数模型
Fig.3 Lumped parameter models of multi-structure system

质量块 m_1—m_{12} 的质量依次为 3，4，3，5，6，6，7，7，11，11，11，11 kg，刚度件 1—11 的刚度依次为 25，30，50，45，35，30，25，30，20，20.5，19 kN/m，阻尼件 1—11 的阻尼依次为 3，4，5，3，4，5，7，5，6，3，5 Ns/m。

2）将各部件及系统的质量、刚度、阻尼矩阵代入频响函数定义式（22）中，可得式（16）及（21）中等式右边计算所需的频响函数。也可以通过式（22）计算得到产品 A 在耦合界面处的 FRF 直接计算值。

$$\left[\boldsymbol{H}\right]=\left[-\omega^2\cdot\left[\boldsymbol{M}\right]+\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\left[\boldsymbol{C}\right]+\left[\boldsymbol{K}\right]\right]^{-1} \tag{22}$$

式中：[$\boldsymbol{M}$]为质量矩阵；[$\boldsymbol{K}$]为刚度矩阵；[$\boldsymbol{C}$]为阻尼矩阵；ω为角速度，i 为虚数单位。

3）将上一步计算得到的等式所需频响函数代入式（16）和（21），会得到产品 A 在耦合界面处的 FRF 预测值。

4）将第 3 步中获得的产品 FRF 预测值与第 2 步当中获得的产品 FRF 直接计算值进行比较，结果见图 4—5。

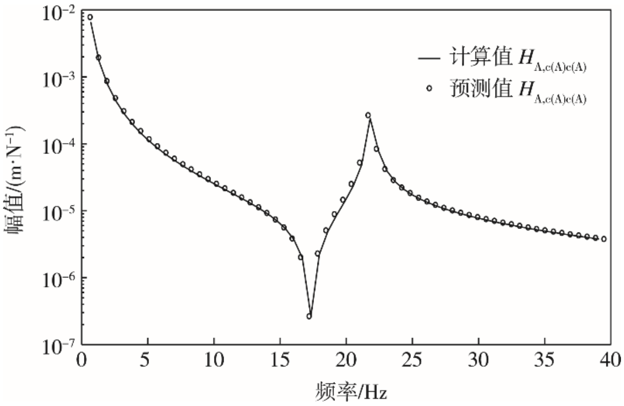


图 4　产品 A 的频响函数 $H_{\mathrm{A,c(A)c(A)}}$计算值与预测值结果比较

Fig.4 Comparison of calculated and predicted product FRF $H_{\mathrm{A,c(A)c(A)}}$

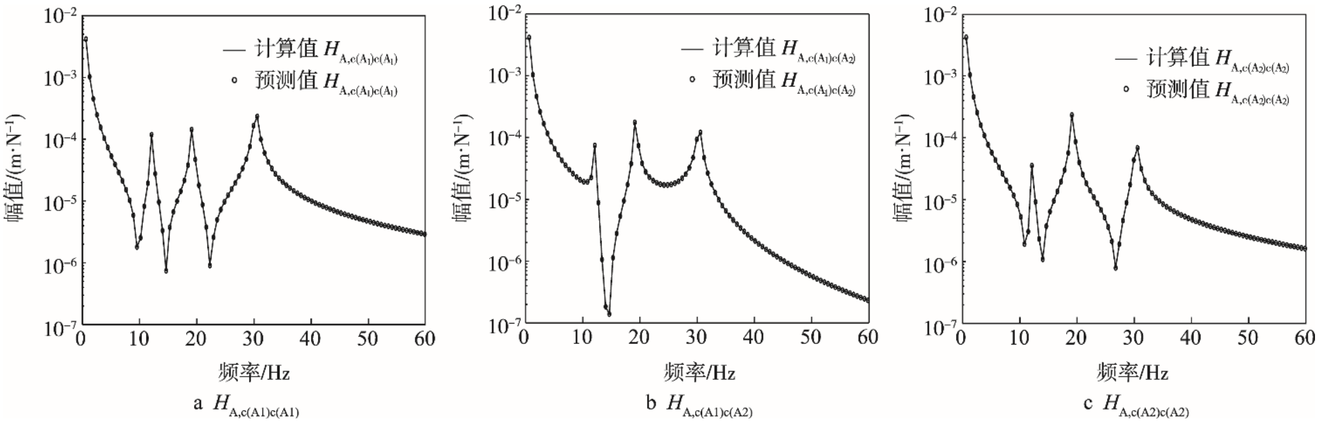


图 5　产品 A 频响函数[H_{A}]$_{\mathrm{c(A)c(A)}}$预测值与计算值结果比较

Fig.5 Comparison of calculated and predicted product FRF [H_{A}]$_{\mathrm{c(A)c(A)}}$

如图 4—5 所示，通过式（16）和（21）预测出来的产品 FRF $H_{\mathrm{A},c(\mathrm{A})c(\mathrm{A})}$和[$H_{\mathrm{A}}$]$_{c(\mathrm{A})c(\mathrm{A})}$与通过频响函数定义式（22）获得的产品 FRF 直接计算值相一致，从而验证了文中提出的三级刚性耦合产品包装运输系统间接逆向子结构分析理论的正确性。

3　结语

文中根据结构动态逆向子结构分析方法与矩阵理论，建立了可获取多级刚性连接的“产品-包装-运载体”运输包装系统中产品动态实时特性的计算公式。通过对单点刚性耦合以及多点刚性耦合情况下的集总参数模型进行计算，发现在数值验证中得到的预测值与直接计算值相一致，进一步检验了该间接逆向子结构分析方法的完备性，证实了该方法无需任何耦合界面处频响函数就能利用易测量的部件水平频响函数以及其他易测的系统水平频响函数预测产品动态响应。结果表明，该方法不但可以克服测量过程中耦合界面处频响函数难测的问题，且可以为逆子结构理论在解决耦合界面频响函数难测问题时提供新思路。

参考文献：

[1] NEWTON R E. Fragility Assessment Theory and Test Procedure[M]. Monterey: Monterey Research Laboratory, 1968.

[2] BURGESS G J. Product Fragility and Damage Boundary Theory[J]. Packaging Technology and Science, 1988, 15(10): 5—10.

[3] 王振林，吴长富，奚德昌. 物品包装系统位移损坏边界[J]. 振动工程学报, 1998(4): 57—65.
WANG Zhen-lin, WU Chang-fu, XI De-chang. The Displacement Damage Boundary of Product Packaging System[J]. Journal of Vibration Engineering, 1998(4): 57—65.

[4] WANG Z W, HU C Y. Shock Spectra and Damage Boundary Curves for Nonlinear Package Cushioning

System[J]. Packaging Technology and Science, 1999, 12(5): 207—217.

[5] WANG Z W. On Evaluation of Product Dropping Damage[J]. Packaging Technology and Science, 2002, 15: 115—120.

[6] LU L X, WANG Z W. Dropping Bruise Fragility and Bruise Boundary of Apple Fruit[J]. Transaction of ASABE, 2007, 50(4): 1323—1329.

[7] 王军，王志伟. 半正弦脉冲激励下考虑易损件的正切型包装系统冲击特性研究[J]. 振动与冲击，2008, 27(1): 167—168.
WANG Jun, WANG Zhi-wei. 3-Dimensional Shock Response Spectra Characterizing Shock Response of A Tangent Packaging System with Critical Components[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(1): 167—168.

[8] LEPINE J, ROUILLARD V, SEK M. Review Paper on Road Vehicle Vibration Simulation for Packaging Testing Purposes[J]. Packaging Technology and Science, 2015, 28(8): 672—682.

[9] WANG Z W, WANG J, ZHANG Y B, et al. Application of the Inverse Substructure Method in the Investigation of Dynamic Characteristics of Product Transport System[J]. Packaging Technology and Science, 2012, 25(6): 351—362.

[10] LIM T C. Determination of the Frequency Response Functions of Complex Systems Using Spectral-based Inverse Substructuring Approach[J]. Acoustical Society of America Journal, 2001, 109(5): 2409—2409.

[11] ZHEN J, LIM T C, LYU Guang-qing. Determination of System Vibratory Response Characteristics Applying A Spectral-based Inverse Sub-structuring Approach. Part I: Analytical Formulation[J]. International Journal of Vehicle Noise and Vibration, 2004, 1(1/2): 1—30.

[12] 王军，卢立新，王志伟. 产品破损评价及防护包装力学研究[J]. 振动与冲击, 2010, 29(8): 43—45.
WANG Jun, LU Li-xin, WANG Zhi-wei. Product Damage Evaluation and Protective Packaging Dynamics[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(8): 43—45.

[13] WANG J, WANG Z W, LU L X. Step-by-step Decoupling Method for Inverse Substructuring Analysis of A Three-component Coupled Packaging System[J]. Journal of Vibration and Control, 2015, 21(4): 676—683.

[14] WANG J, HONG X, QIAN Y, et al. Inverse Sub-structuring Method for Multi-coordinate Coupled Product Transport System[J]. Packaging Technology and Science, 2014, 27(5): 385—408.

[15] 孙中振，王军，卢立新. 刚柔耦合包装系统动态特性分析逆子结构方法[J]. 包装工程, 2015, 36(11): 75—78.
SUN Zhong-zhen, WANG Jun, LU Li-xin. Inverse Sub-structurig Method for Characteristics Analysis of Rigid-flexible Coupled Packaging System[J]. Packaging Engineering, 2015, 36(11): 75—78.

[16] 王启利，王军，孙中振，等. 界面响应不可测的刚性耦合系统逆向子结构分析[J]. 振动工程学报，2016, 29(4): 603—608.
WANG Qi-li, WANG Jun, SUN Zhong-zhen, LU Li-xin. Inverse Sub-structuring Theory of Rigid Coupling System with Incomplete Measured Data[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(4): 603—608.

[17] WANG J, MENG T Y, LI M Y, et al. A Practical Estimation of Frequency Response Functions for System Decoupling Indirectly Using a Variable Cross Section Rod[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2018, 140(5): 051019.

[18] 孟天涯，李明宇，郭栋，等. 多点刚性耦合产品包装运输系统间接逆向子结构分析[J]. 振动与冲击，2018, 37(15): 233—238.
MENG Tian-ya, LI Ming-yu, GUO Dong, WANG J. Indirect Inverse Sub-structure Method for Multi-point Rigid Coupling Product Packaging and Transportation Systems[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(15): 233—238.