建立蜂窝纸板本构模型的方法

徐绍虎^{1,2},崔爽^{1,2}

(1.制造装备机构设计与控制重庆市重点实验室,重庆 400067; 2.重庆工商大学,重庆 400067)

摘要:目的 利用三次贝赛尔曲线建立蜂窝纸板的本构模型。方法 利用 MATLAB 拟合实验曲线,比较 拟合曲线和实验曲线的拟合度。结果 根据三次贝塞尔曲线的特点,将特征多边形 P₀P₁P₂P₃首、末两点 P₀点和 P₃点作为实验曲线上的点。通过以下判定原则可得到拟合度很好的三次贝塞尔曲线,如果特征 多边形 P₀P₁P₂P₃控制的三次贝塞尔曲线在实验曲线的下方,那么应该将 P₁点、P₂点上移,相反则下移; 如果特征多边形 P₀P₁P₂P₃控制的三次贝塞尔曲线曲线开口比实验曲线大,那么应该将 P₁点和 P₂点之间 的距离缩小,相反则增大;如果实验曲线有很长一段斜率变化很小,那么与之对应的特征多边形某条边 很长,相反则很短。结论 利用三次贝塞尔曲线分段拟合蜂窝纸板的应力-应变曲线,拟合曲线和实验曲 线有很好的拟合度,用三次贝塞尔曲线参数方程分段表示蜂窝纸板的本构模型是可行的。

关键词:蜂窝纸板;本构模型;三次贝塞尔曲线;参数方程

中图分类号:TB484.1; O241.5 文献标识码:A 文章编号:1001-3563(2019)11-0100-05 DOI:10.19554/j.cnki.1001-3563.2019.11.014

Method for Establishing Constitutive Model of Honeycomb Paperboard

XU Shao-hu^{1,2}, CUI Shuang^{1,2}

(1.Chongqing Key Laboratory of Manufacturing Equipment Mechanism Design and Control, Chongqing 400067, China;
 2.Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

ABSTRACT: The work aims to establish a constitutive model of honeycomb paperboard with the three cubed Bezier curve. The fitting degree of the fitting curve and the experimental curve was compared by fitting the experimental curve with MATLAB. According to characteristics of the three cubed Bezier curve, point P_0 and point P_3 which were the first and end points of the characteristic polygon $P_0P_1P_2P_3$ were taken as the points in the experimental curve. The three cubed Bezier curve with good fitting degree would be obtained by means of the following principles. Firstly, if the three cubed Bezier curve controlled by the characteristic polygon $P_0P_1P_2P_3$ was below the experimental curve, point P_1 and point P_2 should be moved downward. Secondly, if the opening of the three cubed Bezier curve controlled by the characteristic polygon $P_0P_1P_2P_3$ was larger than that of the experimental curve, the distance between point P_1 and point P_2 should be reduced. Otherwise, it should be increased. Thirdly, if the experimental curve had a long part with a small change in slope, the edge of the characteristic polygon corresponding to it was very long. Otherwise, it was very short. The stress-strain curve sectional fitted with the three cubed Bezier curve has good fitting degree with the experimental curve. It was feasible to sectional represent the constitutive model of honeycomb paperboard with the three cubed Bezier curve equation.

KEY WORDS: honeycomb paperboard; constitutive model; three cubed Bezier curve; parameter equation

收稿日期: 2018-07-18

基金项目:重庆工商大学科研基金(1552015,1552016)

作者简介:徐绍虎(1982-),男,硕士,重庆工商大学讲师,主要研究方向为包装材料、包装工艺、结构设计等。

蜂窝纸板具有质量轻、耗材少、平压强度高、缓冲性能优异、环保等特点,可用来制作托盘、缓冲衬垫、纸箱等包装制品,已被广泛应用于包装领域。雷晓东等^[1]研究了蜂窝纸板的内部气体对其静态缓冲性能的影响;文献[2—4]研究了蜂窝纸板的动态缓冲特性,范志庚等^[5]研究了疲劳效应对蜂窝纸板性能的影响;文献[6—8]研究了蜂窝纸板的振动传递特性; 滑广军等^[9]研究了预压后蜂窝纸板的应力-应变曲线; 文献[10—12]研究了蜂窝纸板和蜂窝纸板、蜂窝纸板 和其他材料组合后的缓冲性能;文献[13—14]建立了 蜂窝纸板的本构模型。文中拟根据蜂窝纸板应力-应 变曲线的特征探索一种建立其本构模型的方法。

1 实验

1.1 实验方法及采样间隔的确定

将厚度为 25 mm 的蜂窝纸板样品制成 100 mm×100 mm 的试样,在温度为 23 ℃,相对湿度为 50%的恒温恒湿箱中预处理 24 h 以上。依据 GB/T 8168—2008《包装用缓冲材料静态压缩实验方法》, 在万能材料实验机上进行实验。

将蜂窝纸板厚度的 90%计为实验最大应变, 由蜂 窝纸板的厚度得到最大压缩位移为 22.5 mm。实验过 程中的压缩速度设置为 12 mm/min, 从而得到实验的 总时间为 112.5 s。采样点的数目根据最大应变来取, 取为 90×2+1 个, 即 181 个, 从而得到采样间隔数为 180 个。根据实验的总时间和采样间隔数,确定采样 间隔为 625 ms。

1.2 应力-应变曲线的绘制

将实验得到的 181 个采样点依次连成折线,得到 试样的应力-应变曲线,见图 1。



Fig.1 Static compression stress-strain curve of honeycomb paperboard

将蜂窝纸板的静态压缩过程分为4个部分,如图 1中的 OP_0 段、 P_0P_3 段、 P_3O_0 段、 O_0O_3 段,对应位 置的实验数据见表 1, OP_0 段和 P_3Q_0 段采用直线拟合, P_0P_3 段和 Q_0Q_3 段采用三次贝塞尔曲线拟合。

表 1 图 1 中对应点的实验数据

位置	应变/%	应力/kPa	采样点
0	0	0	第1个
P_0	2.5	93.351	第6个
P_3	30	3.348	第61个
Q_0	62.5	22.72	第 126 个
Q_3	90	678.412	第 181 个

2 蜂窝纸板本构模型

2.1 贝塞尔曲线

贝塞尔曲线^[15]的形状仅由称为特征多边形的一 组多边折线顶点控制, n 次贝塞尔曲线需要 n+1 个控 制点。三次贝塞尔曲线见图 2,其由特征多边形 P₀P₁P₂P₃唯一地确定。贝塞尔曲线与特征多边形首、 末两边相切且切点分别为首、末两点。



图 2 三次贝塞尔曲线 Fig.2 Three cubed Bezier curve

贝塞尔曲线的参数向量表达式为:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}}(t) = \sum_{0}^{n} P_{i} B_{i,n}(t) \quad (0 \le t \le 1)$$
(1)

式中: *P_i*(*i*=0,1...*n*)是特征多边形各顶点坐标; *B_{i,n}*(*t*)是基函数, *B_{i,n}*(*t*)的参数表达式为:

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^{i} (1-t)^{n-i}$$
(2)

三次贝塞尔曲线(当 n=3 时)由 $P_0(\varepsilon_0,\sigma_0)$ 点、 $P_1(\varepsilon_1,\sigma_1)$ 点、 $P_2(\varepsilon_2,\sigma_2)$ 点和 $P_3(\varepsilon_3,\sigma_3)$ 点等 4 个 控制点确定,其参数向量表达式为:

$$\vec{P}(t) = (1-t)^{3} \vec{P}_{0} + 3(1-t)^{2} t \vec{P}_{1} + 3(1-t)t^{2} \vec{P}_{2} + t^{3} \vec{P}_{3} \quad (0 \le t \le 1)$$
(3)

 $\Gamma \rightarrow 7$

也可以表示为矩阵形式:

$$\vec{P}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}_0 \\ \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \end{bmatrix}$$

$$(0 \le t \le 1) \tag{4}$$

按 t 的升幂,写成二维分量 $\varepsilon(t)$ 和 $\sigma(t)$ 的参数表 达式:

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = L_0 + L_1 t + L_2 t^2 + L_3 t^3 \\ \sigma(t) = M_0 + M_1 t + M_2 t^2 + M_3 t^3 \end{cases} \quad (0 \le t \le 1) \quad (5)$$

式中:参数 *L*₀, *L*₁, *L*₂, *L*₃, *M*₀, *M*₁, *M*₂, *M*₃ 均为常量,取值见表 2。

2.2 确定三次贝塞尔曲线特征多边形的方法

用三次贝塞尔曲线分别拟合图 1 中的 P₀P₃ 段和 Q₀Q₃ 段。由于贝塞尔曲线经过特征多边形的首、末 两点并与首、末两边相切,因此拟合的 2 段三次贝塞 尔曲线分别经过图 1 中的 P₀点、P₃点、Q₀点、Q₃点。 根据贝塞尔曲线的特点,要想得到拟合度很好的三次 贝塞尔曲线,可以采用以下的方法。

1)如果特征多边形 $P_0P_1P_2P_3$ 或 $Q_0Q_1Q_2Q_3$ 控制 的曲线在实验曲线的下方,那么应该将 P_1 点、 P_2 点 或 Q_1 点、 Q_2 点上移,相反则下移。

2)如果特征多边形 *P*₀*P*₁*P*₂*P*₃ 或 *Q*₀*Q*₁*Q*₂*Q*₃ 控制的曲线开口比实验曲线大,那么应该将 *P*₁点和 *P*₂点 或 *Q*₁点和 *Q*₂点之间的距离缩小,相反则增大。

3)如果实验曲线有很长一段斜率变化很小,那 么与之对应的特征多边形某条边很长,相反则很短。

表 2	式 (5) 「	P参数取值	
Tab.2 Para	ameters in	expression	(5)

L_0	L_1	L_2	L3	M_0	M_1	M_2	<i>M</i> ₃	
63	$-3\varepsilon_0+3\varepsilon_1$	$3\varepsilon_0-6\varepsilon_1+3\varepsilon_2$	$-\varepsilon_0+3\varepsilon_1-3\varepsilon_2+\varepsilon_3$	σ_0	$-3\sigma_0+3\sigma_1$	$3\sigma_0-6\sigma_1+3\sigma_2$	$-\sigma_0+3\sigma_1-3\sigma_2+\sigma_3$	

2.3 贝塞尔曲线拟合实验曲线

根据前述方法,反复比较,确定 *P*₁点、*P*₂点、 *Q*₁点、*Q*₂点的取值分别为(6.0,15.0),(15.0,-5.0), (83.0,21.8),(87.0,80.0)。由表 1 可知,*P*₀*P*₃ 段和 *Q*₀*Q*₃ 段的采样点个数均为 56 个。分别由特征多边形 *P*₀*P*₁*P*₂*P*₃,*Q*₀*Q*₁*Q*₂*Q*₃ 确定 2 段三次贝塞尔曲线拟合实 验曲线的 *P*₀*P*₃ 段和 *Q*₀*Q*₃ 段时,参数 *t* 的值均依次取 为 0,1/55,2/55,3/55...52/55,53/55,54/55,1。 利用 MATLAB 软件拟合的 2 段三次贝塞尔曲线和控 制其形状的特征多边形见图 3。

连接 *OP*₀, *P*₃*Q*₀,即可得到实验曲线的完整拟合曲线,见图 4。

将图 4 的拟合曲线(用实线表示)和图 1 的实验曲线(用虚线表示)放在一起,见图 5。由图 5 可以看出,2 条曲线拟合度很好。







图 4 实验曲线的完整拟合曲线 Fig.4 Complete fitting curve of experimental curve



图 5 拟合曲线和实验曲线比较 Fig.5 Comparison of fitting curve and experimental curve

2.4 本构模型的建立

根据前面所述,可得到蜂窝纸板实验曲线的本构

模型。由图 3 和图 4 可知,蜂窝纸板实验曲线被分成 4 段分别进行了拟合。

1)第1段(*OP*₀段)。此段为直线,由表1可知, *O*点和*P*₀点的坐标分别为(0,0)和(2.5,93.351), 从而得到此段的本构模型为:

 $\sigma = 37.340\varepsilon \qquad (0 \le \varepsilon \le 2.5)$

2)第2段(*P*₀*P*₃段)。此段为三次贝塞尔曲线, 由前述可知, *P*₀点、*P*₁点、*P*₂点和*P*₃点的坐标分别 为(2.5,93.351),(6.0,15.0),(15.0,-5.0)和 (30.0,3.348)。根据式(5)和表 2,可得到此段的本 构模型为:

 $\begin{cases} \varepsilon(t) = 2.5 + 10.5t + 16.5t^2 + 0.5t^3\\ \sigma(t) = 93.351 - 235.053t + 175.053t^2 + 30.003t^3 \end{cases} (0 \le t \le 1)$

3)第3段(*P*₃*Q*₀段)。此段为直线,由表1可知, *P*₃点和 *Q*₀点的坐标分别为(30.0,3.348)和 (62.5.22.720),从而得到此段的本构模型为:

 $\sigma = 0.596\varepsilon - 14.532 \quad (30.0 \le \varepsilon \le 62.5)$

4)第4段(Q₀Q₃段)。此段为三次贝塞尔曲线, 由前述可知,Q₀点、Q₁点、Q₂点和Q₃点的坐标分别 为(62.5,22.720),(83.0,21.8),(87.0,80.0)和 (90.0,678.412)。根据式(5)和表 2,可得到此段的 本构模型为:

 $\begin{cases} \varepsilon(t) = 62.5 + 61.5t - 49.5t^2 + 15.5t^3\\ \sigma(t) = 22.720 - 2.760t + 177.360t^2 + 481.092t^3 \end{cases} (0 \le t \le 1)$

3 结语

1)通过实验得到蜂窝纸板的应力-应变曲线,根据实验曲线的特点将其分成4段分别进行拟合,OP0 段和 P₃Q₀段为直线拟合,P₀P₃段和 Q₀Q₃段为三次贝 塞尔曲线拟合。

2)提出了确定三次贝塞尔曲线特征多边形的方法,通过此方法得到的特征多边形控制三次贝塞尔曲线和实验曲线有很好的拟合度。

3)由拟合曲线建立了蜂窝纸板的分段本构模型。 研究表明,用三次贝塞尔曲线参数方程分段表示蜂窝 纸板的本构模型是可行的。蜂窝纸板的分段本构模型 的建立,为缓冲包装设计提供了依据。

参考文献:

 [1] 雷晓东,孙德强,罗鹏飞,等.内含气体对蜂窝纸板 静态缓冲性能的影响[J].包装工程,2016,37(19): 39—43.

> LEI Xiao-dong, SUN De-qiang, LUO Peng-fei, et al. Influence of Entrapped Air on the Static Cushioning Performance of Honeycomb Paperboard[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(19): 39–43.

- [2] 张宇, 王志伟. 蜂窝纸板动态缓冲特性的试验研究
 [J]. 包装学报, 2012, 4(1): 9—12.
 ZHANG Yu, WANG Zhi-wei. Experimental Research on Dynamic Cushioning Properties of Honeycomb Paperboard[J]. Packaging Journal, 2012, 4(1): 9—12.
- [3] 丁勇,李晓茜,石媛媛. 蜂窝纸板动态压缩性能试验 研究[J]. 环境技术, 2015(4): 16—18. DING Yong, LI Xiao-qian, SHI Yuan-yuan. Experimental Study on Dynamic Compression Performance of Honeycomb Paperboard[J]. Environmental Technology, 2015(4): 16—18.
- [4] SUN D Q, ZHANG W H, WEI Y B. Mean Out-ofplane Dynamic Plateau Stresses of Hexagonal Honeycomb Cores under Impact Loadings[J]. Composite Structures, 2010, 92(11): 2609–2621.
- [5] 范志庚, 卢立新, 王军. 疲劳效应对蜂窝纸板系统的内共振条件参数影响的研究[J]. 振动与冲击, 2016, 35(11): 203—207.
 FAN Zhi-geng, LU Li-xin, WANG Jun. Influence of Fatigue Effect on Inner-resonance Condition Parameters of a Honeycomb Paperboard System[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(11): 203—207.
- [6] GUO Y F, ZHANG J H. Shock Absorbing Characteristics and Vibration Transmissibility of Honeycomb Paperboard[J]. Shock & Vibration, 2004, 11(5/6): 521–531.
- [7] WANG B Z, CAO L J. Different Thickness of Honeycomb Paperboard Vibration Frequency of Testing and Simulation[J]. Advanced Materials Research, 2011, 328/329/330: 1421—1424.
- [8] ZHU D P, HE R C, WANG G. Experimental Investigation into Honeycomb Paperboard Vibration Transmissibility Property and Nonlinear Parameters Identification[J]. Advances in Information Sciences & Service Sciences, 2013, 5(7): 390–398.
- [9] 滑广军,陈琬,卢富德,等.蜂窝纸板缓冲曲线特征 分析[J]. 包装学报, 2018, 10(1): 1—7.
 HUA Guang-jun, CHEN Wan, LU Fu-de, et al. Analysis of Buffer Curve of Honeycomb Paperboard[J].
 Packaging Journal, 2018, 10(1): 1—7.
- [10] 朱若燕, 尹琪, 李厚民. 组合蜂窝纸板缓冲性能的静态试验研究[J]. 湖北工业大学学报, 2010, 25(4): 105—107.

ZHU Ruo-yan, YIN Qi, LI Hou-min. Study of the Performance of Combinatorial Honeycomb Paperboards Through the Static Compression[J]. Journal of Hubei University of Technology, 2010, 25(4): 105–107.

 [11] 钟玲珠,陈安军. EPE/EPS 与蜂窝纸板组合静态缓冲 性能的研究[J]. 包装工程, 2013, 34(9): 36—39.
 ZHONG Ling-zhu, CHEN An-jun. Study on Static Cushion Performance of EPE/EPS and Honeycomb Paperboard Combination[J]. Packaging Engineering, 2013, 34(9): 36—39.

- [12] JIANG H Y, ZHAO D J, ZHANG W L, et al. Some Observations on Dynamical Cushioning Property of Overlay Cushion Combined with Dissimilar Materials [J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 200: 122—125.
- [13] 卢富德,高德.蜂窝纸板一维动态本构关系及应用
 [J].振动工程学报,2016,29(1):38—44.
 LU Fu-de, GAO De. One-dimension Constitutive Relationship and Its Application for Honeycomb Paper-

board[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(1): 38-44.

- [14] WANG Z W, YU P E. Mathematical Modeling of Energy Absorption Property for Paper Honeycomb in Various Ambient Humidities[J]. Materials and Design, 2010, 31(9): 4321-4328.
- [15] 王德忠.包装计算机辅助设计[M].北京:印刷工业 出版社,2009.
 WANG De-zhong. Packaging Computer Aided Design[M]. Beijing: Printing Industry Press, 2009.