机械与过程控制

随从力作用下印刷运动薄膜的振动特性研究

卢瑶，武吉梅，王砚，邵明月，武秋敏，李妮
（西安理工大学，西安 710048）

摘要：目的 为了优化精密涂布印刷机的设计，并研究在精密涂布过程中薄膜的传输稳定性。**方法** 将空气阻力模化为随从力，通过微分求积法，分析随从力、张力比和长宽比对薄膜稳定性的影响。**结果** 通过编程计算分析得到，相同条件下的对边固支对边自由的不稳定区域大于四边固支的不稳定区域，且随着张力比的增加，系统的稳定区域逐渐减小。**结论** 薄膜在相同随从力的作用下，张力比对薄膜振动的稳定性有显著影响。为精密涂布印刷机的优化设计制造以及精密涂布过程中薄膜的传输稳定性提供理论指导和依据。

关键词：运动薄膜；随从力；空气阻力；振动
中图分类号：O484；O321 **文献标识码：**A **文章编号：**1001-3563(2019)11-0155-06
DOI：10.19554/j.cnki.1001-3563.2019.11.023

Vibration Characteristics Printed Moving Membrane Subjected to Follower Force

LU Yao, *WU Ji-mei*, *WANG Yan*, *SHAO Ming-yue*, *WU Qiu-min*, *LI Ni*
(Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

ABSTRACT: This study aims to optimize the design of precision coating presses and study the transport stability of membrane during precision coating. The air resistance was modeled as a follower force. The influences of the follower force, the tension ratio and the aspect ratio on the membrane stability were analyzed by the differential quadrature method. Through programming and calculation, it was found that the unstable region of the edge-supporting edge was larger than that of the four-sided fixed edge under the same conditions, and the stable region of the system decreased with the increase of the tension ratio. The results show that under the same follower force, the tension ratio has a significant effect on the stability of the membrane vibration. This study provides theoretical guidance and basis for the optimal design and manufacture of precision coating presses and the transmission stability of membrane during precision coating.

KEY WORDS: moving membrane; follower force; air resistance; vibration

薄膜在高速印刷或者涂布的过程中，由于料卷直径的变化，薄膜的运动速度和所受张力都会发生变化，薄膜会受到周围气流场的影响而加剧振动，所以空气阻力对薄膜工作的影响不可忽略。空气阻力的作用机理与随从力具有一定相似性，随从力是一种非保守力。综上所述，系统地研究薄膜在随从力作用下的横向振动问题，对提高印品的套印精度及控制印刷过程中薄膜的振动具有重要意义，已引起众多专家和学者的关注。

近年来，国内外学者已对随从力作用下运动系统

收稿日期：2019-01-29
基金项目：陕西省自然科学基金（2018JM5023，2018JM1028，2018JM5119）；西安理工大学博士学位论文创新基金资助项目（310-252071702）
作者简介：卢瑶（1995—），女，西安理工大学硕士生，主攻机械结构动力学与薄膜的振动特性。
通信作者：武吉梅（1963—），女，西安理工大学教授、博导，主要研究方向为印刷设备动态特性与仿真。

的稳定性做了大量研究工作。Guo[1]等研究了切向随从力作用下热弹性耦合矩形板的动力特性和稳定性。Kim[2—3]分析了随从力下板的动态稳定性和脉冲随从力作用对各向同性和非对称层合板动力稳定性的影响。Robinson[4—5]等研究了粘弹性矩形板在均匀分布和三角分布切向随从力作用下的动态稳定性。Jayaraman[6]通过计算分析了随从力下正交各向异性板的发散和颤振不稳定性。Biswas[7]等研究了均匀单轴随从力作用下损伤的正交铺层和角钢层合板的振动。李清禄[8]等研究了功能梯度材料圆板在非保守随从力作用下的稳定性问题。Torki[9]等研究了分布轴向随从力作用下功能梯度材料圆柱壳的颤振问题。Alidoost[10]研究了受集中随从力作用下分层组合梁的振动、屈曲和颤振不稳定性问题。王砚、王忠民[11—15]等研究了均匀分布的切向随从力作用下特殊正交向异性矩形板、功能梯度材料薄板、带有中间线弹簧支承的矩形薄板及热弹性耦合矩形板等的振动稳定性问题。

综上所述，随从力作用下薄膜的振动特性及稳定性研究鲜有报道。文中拟以印刷运动薄膜为研究对象，研究随从力作用下印刷运动薄膜振动特性。通过D'Alembert 原理得到运动薄膜的横向振动微分方程，应用微分求积法得到其复特征值方程，最后分析随从力、张力比和长宽比对薄膜稳定性的影响，以期为印刷机的设计、制造以及印刷机的稳定性提供理论依据。

1　振动模型的建立

取 2 对印刷滚筒（或辊子）间支撑的一段运动薄膜，将其简化为印刷运动薄膜工作模型（见图 1），并对此段薄膜进行受力分析。图 1 所示为印刷运动薄膜工作的简化模型，选取 $Oxyz$ 坐标系，以薄膜的运动方向为 x 方向，其运动速度为 v；薄膜的宽度方向为 y 方向；横向振动的位移方向为 z 方向。设薄膜横向振动位移为 $\overline{w}(x,y,t)$，t 为时间，T_x 和 T_y 为其在边界上受到的单位长度张力，a 为两对棍子之间的距离，b 为薄膜宽度，ρ 为薄膜的面密度。

在薄膜运动的过程中，会受到与薄膜运动方向相反的空气阻力，根据空气动力学理论，文中将空气的作用力简化为随从力。随从力是一种非保守力，其作用机理与空气阻力具有一定相似性，因此将空气阻力简化为切向均匀分布的随从力 q。

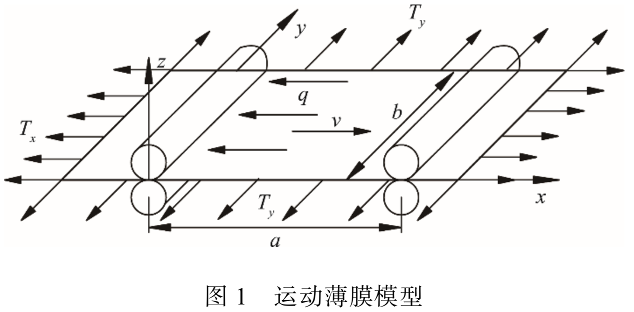


图 1　运动薄膜模型
Fig.1 Model of moving membrane

2　运动微分方程

薄膜微元体的受力见图 2。如图 2 所示，在薄膜上取一小微元体 dxdy，对其进行受力分析，则 dx，dy 边上的拉力在 z 方向上引起的合力分别为：

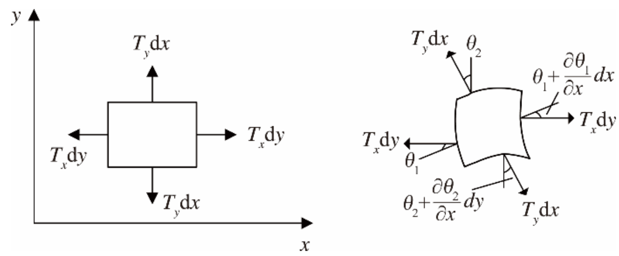


图 2　薄膜微元体的受力
Fig.2 Force drawing of micro unit of membrane

$$\begin{aligned}&T_y\mathrm{d}y\left(\theta_2+\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\mathrm{d}y\right)-T_y\mathrm{d}x\theta_2=T_y\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&T_y\frac{\partial\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}\right)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=T_y\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&T_x\mathrm{d}y\left(\theta_1+\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-T_x\mathrm{d}y\theta_1=\\&T_x\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=T_x\frac{\partial\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=T_x\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{1}$$

随从力为面力，且均布力 q 为常量，则产生的线分布伴生力 $R=-q(a-x)\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}$，由 D'Alembert 原理得到运动薄膜的横向振动微分方程式为：

$$\begin{aligned}&\rho\left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}\right)-T_x\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}-\\&T_y\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2}+q(a-x)\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}=0\end{aligned}\tag{2}$$

引入无量纲：

$$\begin{aligned}&\zeta=\frac{x}{a},\quad\eta=\frac{y}{b},\quad w=\frac{\overline{w}}{a},\quad c=v\sqrt{\frac{\rho_0}{T_x}},\\&\tau=t\sqrt{\frac{T_x}{a^2\rho_0}},\quad\lambda=\frac{T_y}{T_x},\quad\mu=\frac{a}{b},\quad Q=\frac{qa}{T_x}\end{aligned}\tag{3}$$

式中：ζ，η 为薄膜边长的无量纲；w 为薄膜的无量纲振动位移；c 为无量纲速度；τ 为无量纲时间；λ 为张力比；μ 为长宽比；Q 为无量纲随从力。

无量纲方程为：

$$(c^2-1)\frac{\partial^2w}{\partial\zeta^2}+2c\frac{\partial^2w}{\partial\varsigma\partial\eta}-\lambda\mu^2\frac{\partial^2w}{\partial\eta^2}+$$

$$Q(1-\varsigma)\frac{\partial^2 w}{\partial \varsigma^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}=0 \tag{4}$$

设方程（4）的解为，其中 W 为阵型函数：

$$w(\zeta,\eta,\tau)=W(\zeta,\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau} \tag{5}$$

将式（5）带入式（4）中，得随从力作用下运动薄膜横向振动的振型方程。

$$\left(c^2-1\right)\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2}-\lambda\mu^2\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}+2c\omega\mathrm{h}\frac{\partial W}{\partial \zeta}-\omega^2 W+Q(1-\varsigma)\frac{\partial^2 w}{\partial \varsigma^2}=0 \tag{6}$$

式中：$\mathrm{h}=\sqrt{-1}$；ω 为无量纲复频率。

3　复特征值方程的建立

应用微分求积法分析边界条件分别为四边固支、对边固支对边自由的随从力作用下运动薄膜的横向振动特性和稳定性。对振型方程（6），用微分求积法得到其复特征值方程。

$$\left(c^2-1\right)\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{A}_{ik}^{[2]}W_{kj}-\lambda\mu^2\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{B}_{jk}^{[2]}W_{ik}+2c\omega\mathrm{h}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{A}_{ik}^{[1]}W_{kj}-\omega^2 W_{ij}+Q(1-\varsigma)\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{A}_{ik}^{[2]}W_{kj}=0 \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为权系数矩阵，权系数 $A_{ik}^{[1]},A_{ik}^{[2]},B_{jk}^{[2]}$ 的值可应用公式[16]求得。

四边固支与对边固支对边自由边界条件的微分求积形式分别为式（8—9）。

$$\begin{cases}W_{1j}=W_{Nj}=0 & (j=1,2\cdots N)\\ W_{i1}=W_{iN}=0 & (i=1,2\cdots N)\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}W_{1j}=W_{Nj}=0 & (j=1,2\cdots N)\\ \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{B}_{1k}^{[1]}W_{ik}=0 & (i=1,2\cdots N)\\ \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{B}_{Nk}^{[1]}W_{ik}=0 & (i=1,2\cdots N)\end{cases} \tag{9}$$

将方程（7）与边界条件（8—9）合并成矩阵形式可构成广义特征值问题，其特征方程为：

$$\left|\omega^2 R+\omega G+K\right|=0 \tag{10}$$

$$R=-W_{ij}$$

$$G=2c\,\mathrm{h}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{A}_{ik}^{[1]}W_{kj}$$

$$K=(c^2\text{-}1)\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{A}_{ik}^{[2]}W_{kj}-\lambda\mu^2\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{B}_{jk}^{[2]}W_{ik}+Q(1-\varsigma)\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{A}_{ik}^{[2]}W_{kj}$$

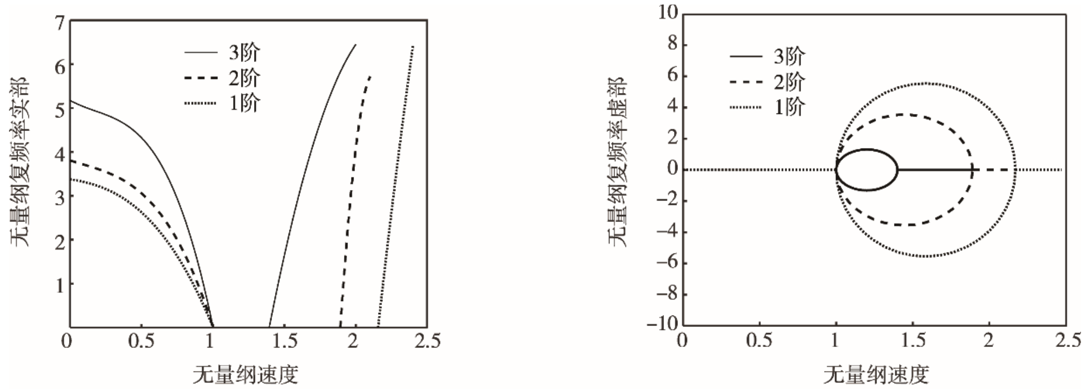
借助 MATLAB 编写源程序，通过求解特征方程（10）便可得到振动频率的值。

4　计算结果与分析

4.1　四边固支运动薄膜

四边固支边界条件下随从力作用的运动薄膜在随从力 Q、张力比 λ 相同，长宽比 μ 不同时前 3 阶无量纲复频率的实部、虚部与无量纲速度的关系变化曲线见图 3—5。图 3—5 给出了当随从力 Q=0.1、长宽比 μ=1，张力比分别为 λ=0.1，0.5，1 时薄膜的前 3 阶无量纲固有频率和无量纲运动速度的关系曲线。从图 3 中可以看出，随从力 Q=0.1、长宽比 μ=1、张力比为 λ=0.1，当 0<c<1 时，前 3 阶无量纲复频率的实部随无量纲速度的增大不断减小，复频率的虚部一直为 0，薄膜工作在稳定区域；当 c=1 时，前 3 阶无量纲复频率的实部同时变为 0，因此 c=1 就是系统发散失稳的临界速度；当 c>1 时，复频率的虚部不再为 0，系统开始发散失稳。第 1，2，3 阶模态在 c=2.17，1.89，1.4 处重新趋于稳定。

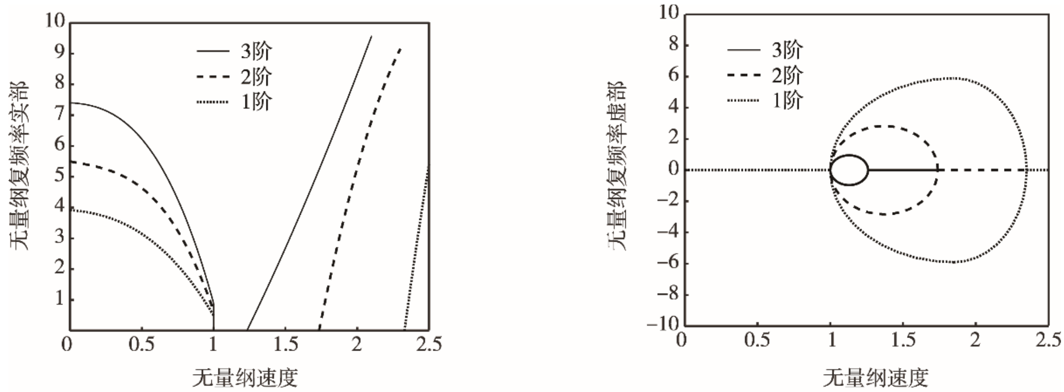
从 4 图中可以看出，随从力 Q=0.1、长宽比 μ=1、张力比为 λ=0.5，当 0<c<1 时，前 3 阶无量纲复频率的实部随无量纲速度的增大不断减小，复频率的虚部一直为 0，薄膜工作在稳定区域；当 c=1 时，前 3 阶无量纲复频率的实部同时变为 0，因此 c=1 就是系统



a 无量纲复频率实部　　　　b 无量纲复频率虚部

图 3　无量纲复频率与无量纲速度的关系（μ=1，λ=0.1，Q=0.1）

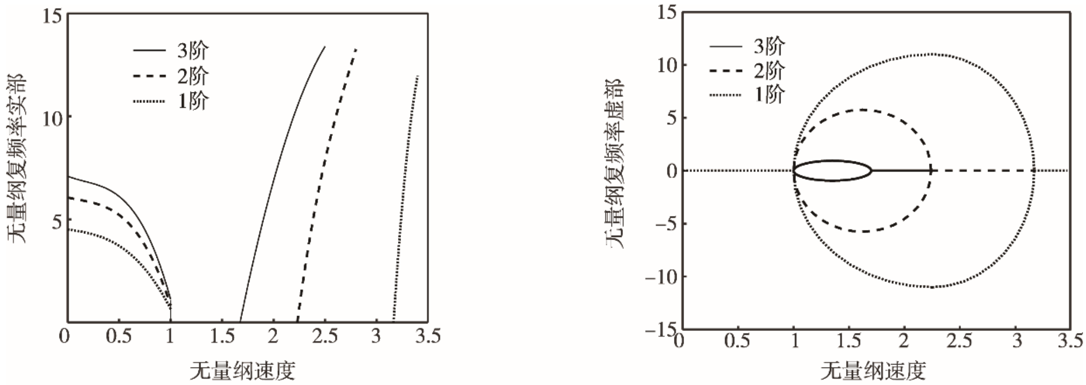
Fig.3 Dimensionless complex frequency varied with dimensionless velocity (μ=1，λ=0.1，Q=0.1)



a 无量纲复频率实部　　b 无量纲复频率虚部

图 4 无量纲复频率与无量纲速度的关系（μ=1，λ=0.5，Q=0.1）

Fig.4 Dimensionless complex frequency varied with dimensionless velocity (μ=1，λ=0.5，Q=0.1)



a 无量纲复频率实部　　b 无量纲复频率虚部

图 5 无量纲复频率与无量纲速度的关系（μ=1，λ=1，Q=0.1）

Fig.5 Dimensionless complex frequency varied with dimensionless velocity (μ=1，λ=1，Q=0.1)

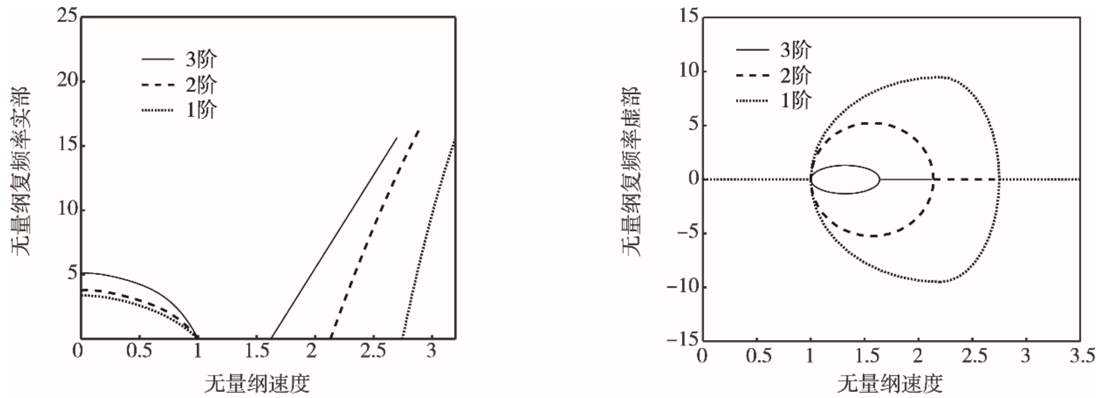
发散失稳的临界速度；当 c>1 时，复频率的虚部不再为 0，系统开始发散失稳。第 1，2，3 阶模态在 c=2.35，1.74，1.25 处重新趋于稳定。

从 5 图中可以看出，随从力 Q=0.1、长宽比 μ=1、张力比 λ=1，当 0<c<1 时，第 1，2，3 阶模态在 c=3.17，2.24，1.68 处重新趋于稳定。

对比 3 组结果可得，当运动薄膜的边界条件为四边固支时，张力比对临界速度有显著的影响，并随着张力比的增加，系统重新稳定的速度增大，且系统的稳定区域逐渐减小。

4.2 对边固支对边自由运动薄膜

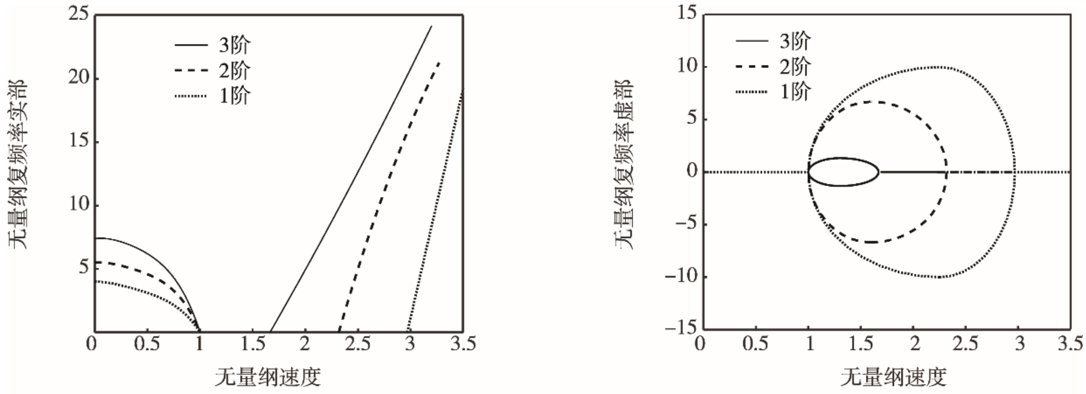
对边固支对边自由边界条件下随从力作用的运动薄膜在随从力 Q、长宽比 μ 相同，张力比 λ 不同时的前 3 阶无量纲复频率的实部、虚部与无量纲速度的关系变化曲线见图 6—8。



a 无量纲复频率实部　　b 无量纲复频率虚部

图 6 无量纲复频率与无量纲速度的关系（μ=1，λ=0.1，Q=0.1）

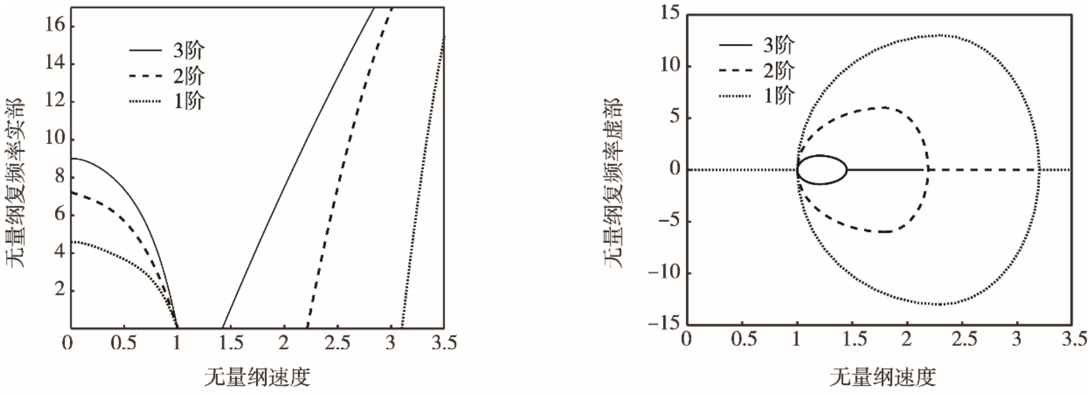
Fig.6 Dimensionless complex frequency varied with dimensionless velocity (μ=1，λ=0.1，Q=0.1)



a 无量纲复频率实部　　b 无量纲复频率虚部

图 7　无量纲复频率与无量纲速度的关系（μ=1，λ=0.5，Q=0.1）

Fig.7 Dimensionless complex frequency varied with dimensionless velocity (μ=1，λ=0.5，Q=0.1)



a 无量纲复频率实部　　b 无量纲复频率虚部

图 8　无量纲复频率与无量纲速度的关系（μ=1，λ=1，Q=0.1）

Fig.8 Dimensionless complex frequency varied with dimensionless velocity (μ=1，λ=1，Q=0.1)

从图 6 中可以看出，随从力 Q=0.1、长宽比 μ=1、张力比 λ=0.1，当 0<c<1 时，前 3 阶无量纲复频率实部随无量纲速度的增大不断减小，复频率的虚部一直为 0，薄膜工作在稳定区域；当 c=1 时，前 3 阶无量纲复频率的实部同时变为 0，因此 c=1 就是系统发散失稳的临界速度；当 c>1 时，复频率的虚部不再为 0，系统开始发散失稳。第 1，2，3 阶模态在 c=2.75，2.16，1.64 处重新趋于稳定。

从 7 图中可以看出，随从力 Q=0.1、长宽比 μ=1、张力比 λ=0.5，当 0<c<1 时，前 3 阶无量纲复频率实部随无量纲速度的增大不断减小，复频率的虚部一直为 0，薄膜工作在稳定区域；当 c=1 时，前 3 阶无量纲复频率的实部同时变为 0，因此 c=1 就是系统发散失稳的临界速度；当 c>1 时，复频率的虚部不再为 0，系统开始发散失稳。第 1，2，3 阶模态在 c=2.98，2.32，1.69 处重新趋于稳定.

由图 8 可知，当随从力 Q=0.1、长宽比 μ=1、张力比 λ=1 时，第 1，2，3 阶模态在 c=3.2，2.19，1.45 处重新趋于稳定。

对比 3 组结果可得，当运动薄膜的边界条件为对边固支对边自由时，张力比对临界速度有显著的影响，随着张力比的增加，系统重新稳定的速度增大，且系统的不稳定区域增大，稳定区域逐渐减小。

5　结语

文中采用微分求积法对随从力作用下的运动薄膜振动特性及稳定性进行了分析，为优化印刷设备结构以及提升高速运动薄膜的工作稳定性提供了理论依据。主要结论如下所述。

1）不论印刷运动薄膜的边界条件为四边固支或对边固支对边自由，张力比对薄膜运动的稳定性都有显著影响。

2）在随从力相同的情况下，随着张力比增加，系统重新稳定的速度增大，系统的不稳定区域增大，稳定区域逐渐减小。

3）在相同的随从力作用下，与四边固支相比，薄膜在对边固支对边自由条件下更容易发散，且相同条件下对边固支对边自由的不稳定区域大于四边固支，说明对边固支对边自由的稳定性更差。

参考文献：

[1]　GUO X, WANG Z, WANG Y. Dynamic Stability of

Thermoelastic Coupling Moving Plate Subjected to Follower Force[J]. Applied Acoustics, 2011, 72(2/3): 100—107.

[2] KIM J H, KIM H S. A Study on the Dynamic Stability of Plates Under a Follower Force[J]. Computers & Structures, 2000, 74(3): 351—363.

[3] CHOO Y S, KIM J H. Dynamic Stability of Rectangular Plates Subjected to Pulsating Follower Forces[J]. Aiaa Journal, 2012, 38(2): 353—361.

[4] ROBINSON M T A, ADALI S. Nonconservative Stability of Viscoelastic Rectangular Plates with Free Edges Under Uniformly Distributed Follower Force[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 107: 150—159.

[5] ROBINSON M T A, ADALI S. Nonconservative Stability of Viscoelastic Plates Subject to Triangularly Distributed Follower Loads[J]. Journal of Theoretical & Applied Mechanics, 2017, 55(3): 1015—1027.

[6] JAYARAMAN G, STRUTHERS A. Divergence and Flutter Instability of Elastic Specially Orthotropic Plates Subject to Follower Forces[J]. Journal of Sound & Vibration, 2005, 281(1): 357—373.

[7] BISWAS S, DATTA P K, KONG C D. Static and Dynamic Instability Characteristics of Curved Laminates with Internal Damage Subjected to Follower Loading[J]. Archive Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science, 2011, 225(7): 1589—1600.

[8] 李清禄, 栾玮荻, 李世荣. 功能梯度材料圆板在随从力作用下的稳定性[J]. 玻璃钢/复合材料, 2016(10): 5—10.
LI Qing-lu, LUAN Wei-di, LI Shi-rong. The Stability of FGM Circular Plates Subjected to Follower Force[J]. Fiber Reinforced Plastics/Composites, 2016(10): 5—10.

[9] TORKI M E, KAZEMI M T, REDDY J N, et al. Dynamic Stability of Functionally Graded Cantilever Cylindrical Shells Under Distributed Axial Follower Forces[J]. Journal of Sound & Vibration, 2014, 333(3): 801—817.

[10] ALIDOOST H, REZAEEPAZHAND J. Instability of a Delaminated Composite Beam Subjected to a Concentrated Follower Force[J]. Thin-walled Structures, 2017, 120: 191—202.

[11] 王砚, 王忠民. 线性变厚度粘弹性矩形板在随从力作用下的动力稳定性[J]. 固体力学学报, 2008, 29(1): 41—51.
WANG Yan, WANG Zhong-min. Dynamic Stability of Linearly Varying-thickness Tiscoelastic Rectangular Plate Subjected to Follower Force[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2008, 29(1): 41—51.

[12] 周银锋, 王忠民, 王砚. 考虑随从力作用的运动粘弹性板的动力稳定性[J]. 工程力学, 2009, 26(1): 25—30.
ZHOU Yin-feng, WANG Zhong-min, WANG Yan. Dynamic Stability of Moving Viscoelastic Plate Subjected to Follower Force[J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(1): 25—30.

[13] 杨峰, 王忠民, 韩玉强. 切向均布随从力作用下的矩形薄板稳定性分析[J]. 锻压技术, 2012, 37(4): 49—51.
YANG Feng, WANG Zhong-min, HAN Yu-qiang. Stability Analysis on Rectangular Plate under Uniformly Distributed Tangential Follower Force[J]. Forging & Stamping Technology, 2012, 37(4): 49—51.

[14] WANG Z, WANG Y, GUO X. Dynamic Stability of Linearly Varying Thickness Viscoelastic Rectangular Plate with Crack and Subjected to Tangential Follower Force[J]. Applied Acoustics, 2009, 70(6): 845—856.

[15] 杨峰, 王忠民. 中间线弹簧支承对随从力作用下矩形薄板稳定性的影响[J]. 应用力学学报, 2013(2): 292—296.
YANG Feng, WANG Zhong-min. Probabilistic Assessment of Failure for Low-medium Level Nuclear Waste Storage Container[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2013(2): 292—296.

[16] 王永亮. 微分求积法和微分求积单元法——原理与应用[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2001.
WANG Yong-liang. Differential Quadrature Method and Differential Quadrature Element Method——Principles and Applications[D]. Nanjing: Nanjing Aerospace University, 2001.