

# 聚乙烯拉伸应变速率的本构方程改进及运用

雷鹏

(天津科技大学, 天津 300222)

**摘要:** **目的** 对等密度、恒温条件下聚乙烯 (PE) 在不同应变率下的力学性能进行研究, 改进原有本构方程的应变率项。**方法** 使用万能材料试验机, 测量不同拉伸速率下 PE 的应力-应变曲线, 并研究随着应变速率的增加, 最大拉伸强度和断裂伸长率的变化趋势; 基于 Sherwood-Frost 本构模型, 对经典的热激活机制 Seeger 模型添加幂函数项, 实现应变率与应变的耦合; 基于最小二乘法, 采用 Matlab 软件拟合本构模型参数, 并将本构方程拟合结果与 300, 400, 500 mm/min 速率下的试验数据进行对比。**结果** 改进后的本构模型拟合数据与试验结果具有更高的吻合度, 最大误差为 8.12%, 出现在 300 mm/min 的速度条件下。**结论** 随着拉伸速率的增加, PE 材料的最大拉伸强度逐渐增加, 断裂伸长率逐渐降低; 改进应变率项后, 本构模型具有更高的拟合精度, 能够为有限元分析提供准确的材料参数。

**关键词:** 本构模型; 应变率; 拉伸; 精度

中图分类号: TQ325.1+2 文献标识码: A 文章编号: 1001-3563(2019)13-0110-06

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2019.13.016

## Improvement and Application of Constitutive Equation for Tensile Strain Rate of Polyethylene

LEI Peng

(Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China)

**ABSTRACT:** The project aims to study the mechanical properties of polyethylene (PE) at different strain rates in equal density and constant temperature conditions, and to improve the strain rate term of the original constitutive equation. The stress-strain curves of PE at different strain rates were measured with a universal material testing machine, and the variation trend of maximum tensile strength and elongation at break was studied with the increase of strain rate; Based on the Sherwood-Frost constitutive model, the power function term was added to Seeger model of classical thermal activation mechanism to realize the coupling of strain rate and strain; Based on the least square method, the parameters of the constitutive model were fitted with the software of Matlab, and the fitting results of the constitutive equation were compared with the experimental data at the rates of 300, 400, 500 mm/min. The fitting data of the improved constitutive model were more consistent with the experimental results. The maximum error was 8.12%, which occurred at the speed of 300 mm/min. With the increase of tensile rate, the maximum tensile strength of PE material increases gradually, while the elongation at break decreases gradually; after improving the strain rate term, the constitutive model has higher fitting accuracy and can provide accurate material parameters for finite element analysis.

**KEY WORDS:** constitutive model; strain rate; tension; accuracy

收稿日期: 2019-03-06

基金项目: 天津科技大学青年创新基金 (2016LG27)

作者简介: 雷鹏 (1993—), 男, 天津科技大学硕士生, 主攻包装动力学。

聚乙烯 (PE) 高分子材料由于其优良的化学稳定性与力学性能, 在物流和包装领域被广泛使用<sup>[1]</sup>。在复杂的运输环境中, 经常遇到冲击、跌落等运输状况, 因此必须要考虑不同应变率对材料力学性能的影响。应变率作为影响材料力学性能的重要因素, 许多专家、学者对其进行了大量研究。目前, 关于无定形聚合物 PC, PMMA 和半结晶聚合物 PA, PE 等高分子材料力学性能的研究已经取得巨大进展。

穆磊金<sup>[2]</sup>基于 Sherwood-Frost 模型研究了典型聚合物材料关于应变率和温度的本构方程。Bauwens 等人<sup>[3-4]</sup>采用 Instron 试验机并结合恒温箱对 PC 材料进行单轴压缩测试, 得到了温度范围为  $-140\sim 160\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 应变率范围为  $10^{-5}\sim 10^{-3}\text{ s}^{-1}$  的应力-应变曲线。李俊<sup>[5]</sup>等基于 Sherwood-Frost 模型, 对低密度聚乙烯泡沫塑料压缩条件下的本构模型进行了推导。马赛尔<sup>[6]</sup>等基于 Sherwood-Frost 模型对高密度聚乙烯拉伸条件下的本构模型进行推导, 并用试验数据证明了本构模型的可靠性。卢子兴<sup>[7]</sup>基于 Sherwood-Frost 模型对聚氨酯泡沫塑料拉伸的本构关系进行了研究, 并用试验对比验证了本构模型的准确性。Mulliken<sup>[8]</sup>等采用分离式霍普金森压杆, 对应变率在  $10^{-4}\sim 10^4\text{ s}^{-1}$  之间的非晶态聚合物 PC, PMMA 的力学性能进行了研究, 并采用热塑性塑料大应变的本构模型, 精确地预测了宽温度范围和宽应变率范围下的大变形行为。饶聪超<sup>[9]</sup>等基于 Sherwood-Frost 模型, 采用热激活机制 Seeger 模型, 对高密度发泡聚乙烯拉伸条件下的本构模型进行推导, 并用试验验证了模型的可靠性。Fleischhauer<sup>[10]</sup>提出了一种描述非晶态聚合物、热固性塑料和热塑性塑料力学性能的本构模型, 并证明了该模型能够在大范围应变率下描述玻璃态聚合物的力学性能。在此基础上, 提出了一种适用于有限元分析的全隐式数值格式, 并对 PC 材料进行了数值模拟分析。Safari<sup>[11]</sup>提出了一种高应变率 ( $10^2\text{ s}^{-1}$  以上) 的聚碳酸酯 (PC) 本构模型, 并采用分离式霍普金森压杆进行了试验验证, 结果表明该模型能够准确描述材料的初始线弹性、整体屈服、应变软化和在高应变速率 (高达  $10000\text{ s}^{-1}$ ) 下的应变硬化等特征。Arriaga<sup>[12]</sup>以 Ansys 为平台, 采用 Perzyna 粘塑性模型, 描述了聚丙烯试样动态冲击下的力学性能, 并通过试验对仿真的可靠性进行了验证。

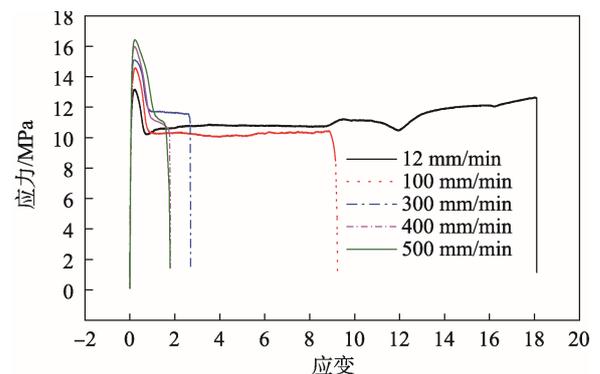
很多专家学者得出了 PE 等高分子材料在宽应变率范围内可靠的本构方程, 也验证了其准确性。然而, 在低速条件下, 应变率项的精确度还能进一步提高。文中拟主要对聚乙烯材料 (PE) 低速拉伸条件下的力学性能进行研究, 并对现有常见模型进行改进, 为静态条件下高分子材料的数值模拟提供较为精确的材料性能。

## 1 试验与结果分析

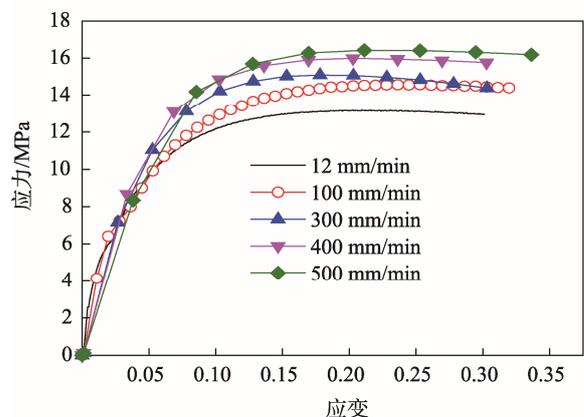
仪器为美国 Instron 电子万能试验机, 产品编号

为 3369, 规格为 3 kN, 最大拉伸速率为 500 mm/min。为了便于拉伸试样, 将 PE 材料制成长 100 mm、宽 6 mm、厚 2 mm 的条状样品。拉伸标准距设定为 20 mm, 分别在 12, 100, 300, 400, 500 mm/min 速率下静态拉伸, 测出每种速率下的名义应力-应变曲线。

试验结果见图 1。随着拉伸速率的增加, 材料的应力-应变曲线呈现不同的趋势, 这表明应变率对聚乙烯材料力学性能有显著影响, 因此在建立本构方程时, 必须考虑应变率的影响。由于整个拉伸过程应力-应变曲线较为复杂, 文中的本构模型只描述图 1b 中材料小变形阶段的力学性能。



a 全过程应力-应变曲线



b 材料小变形阶段的应力-应变曲线

图 1 不同拉伸速率下的应力-应变曲线  
Fig.1 Stress-strain curves at different tensile rates

## 2 建立 Sherwood-Frost 本构模型

### 2.1 确定形状函数

Sherwood 与 Frost<sup>[13]</sup>等在研究聚氨酯泡沫材料时, 用  $\sigma = T(\epsilon)\rho(\epsilon)M(\epsilon, \dot{\epsilon})f(\epsilon)$  去描述聚氨酯动态条件下的力学性能。其中,  $\sigma$  为名义应力;  $\epsilon$  为名义应变;  $T(\epsilon)$  为温度项;  $\rho(\epsilon)$  为密度项;  $M(\epsilon, \dot{\epsilon})$  为应变率影响项;  $f(\epsilon)$  为形状函数。为了更准确地描述准静态拉伸条件下应力-应变关系, 文中将形状函数确定为:

$$f(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n A_i \varepsilon^i + B \quad (1)$$

形状函数为多项式函数。式中： $A$ 、 $B$ 均为拟合参数。虽然  $n$  值越大，曲线拟合越准确，但为了减少计算量，文中取  $n$  为 7， $B$  为常数项。不考虑温度项与密度的影响，令这 2 项值为 1，因此最终的本构模型为：

$$\sigma = f(\varepsilon) \times M(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad (2)$$

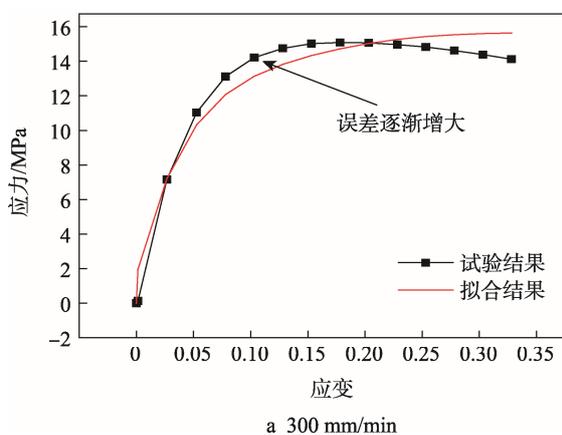
用 Matlab 软件对准静态（12 mm/min）拉伸数据进行拟合，拟合结果见表 1。

表 1 形状函数拟合参数  
Tab.1 Fitting parameters of shape function

| 拟合参数           | 数值       |
|----------------|----------|
| A <sub>1</sub> | 271.4    |
| A <sub>2</sub> | -2950    |
| A <sub>3</sub> | 18 620   |
| A <sub>4</sub> | -70 770  |
| A <sub>5</sub> | 157 600  |
| A <sub>6</sub> | -188 700 |
| A <sub>7</sub> | 93 350   |
| B              | 1.584    |

## 2.2 对比常见应变率项

Sherwood 与 Frost 研究聚氨酯泡沫塑料在单轴



压缩载荷作用下的应力-应变响应时，采用指数函数模型，对应变率和应变进行耦合，耦合项如下：

$$M(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{n(\varepsilon)} \quad (3)$$

$$n(\varepsilon) = a\varepsilon + b \quad (4)$$

式中： $M(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ 为应变率影响项，实现应变和应变率的耦合； $n(\varepsilon)$ 为指数部分，体现应变的影响； $\dot{\varepsilon}_0$ 为参考应变率； $\dot{\varepsilon}$ 为任意拉伸条件下的应变率（ $\dot{\varepsilon} > \dot{\varepsilon}_0$ ）； $\varepsilon$ 为名义应变； $a$ 、 $b$ 为需要拟合参数。最终的本构方程为：

$$\sigma = \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{a\varepsilon+b} \left( \sum_{i=1}^7 A_i \varepsilon^i + B \right) \quad (5)$$

根据 12 mm/min 和 100 mm/min 拉伸条件下的静态拉伸数据，采用最小二乘法对  $a$ 、 $b$  进行求解。原理如式（6）所示。

$$J(\varepsilon) = \min \sum_{k=1}^m \left[ (8.33)^{a\varepsilon_k+b} \left( \sum_{i=1}^7 A_i \varepsilon_k^i + B \right) - \sigma_i \right]^2 \quad (6)$$

式中： $\varepsilon_k$ 为 12 mm/min 拉伸条件下的应变； $\sigma_i$ 为 100 mm/min 拉伸条件下试验应力值； $J(\varepsilon)$ 为最小平方和。最终计算结果为  $a=0.1971$ ， $b=0.001592$ 。指数函数模型和试验结果对比见图 2，随着应变率的增加，拟合结果的误差增大，这是由指数函数本身的特点造成的。

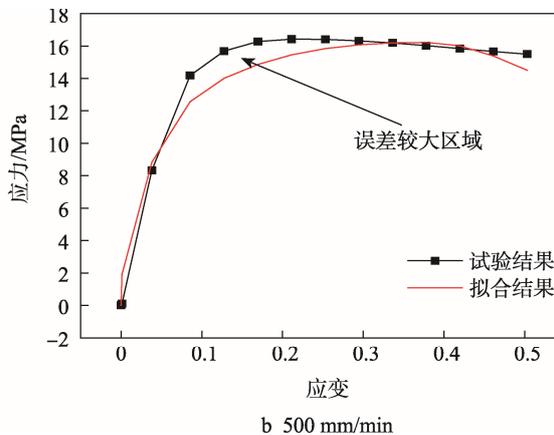


图 2 指数函数模型拟合结果与试验数据对比

Fig.2 Fitting results of exponential function model and comparison with experiments

热激活机制 Seeger<sup>[14]</sup>模型被广泛用于材料本构，描述应变率的影响，Seeger 模型见式（7）。

$$M(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 1 + c \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \quad (7)$$

根据式（6）所示的最小二乘法，采用 Matlab 软件对参数  $c$  进行拟合，最终结果为  $c=0.039$ 。Seeger 模型与试验对比结果见图 3，随着应变率的增加，热激活机制模型拟合误差越来越大。这是因为在某一确定的应变率下，热激活机制模型数值为常数，并不能很好地体现应变率对材料性能的影响，所以造成拟合

曲线从屈服阶段开始与试验数据存在较大误差。

## 2.3 改进本构模型

为了更好地体现应变率对材料力学性能的影响，在相同应变时，将不同速率下的应力与参考速率（12 mm/min）应力的比值作为函数  $y$  值，应变作为自变量  $x$ ，做出曲线，见图 4。

由图 4 可知，随着应变增加，应力比值增长率呈现逐渐趋于平缓的状态，因此单独的热激活机制模型和式（3）的指数函数模型并不能较为准确地体现应

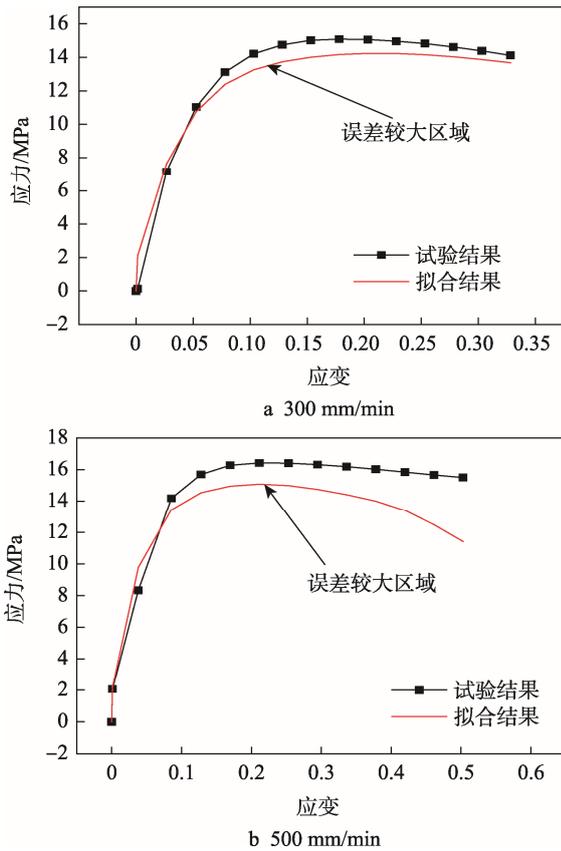


图 3 热激活机制模型拟合结果与试验数据对比  
Fig.3 Fitting results of thermal activation mechanism model and comparison with experimental data

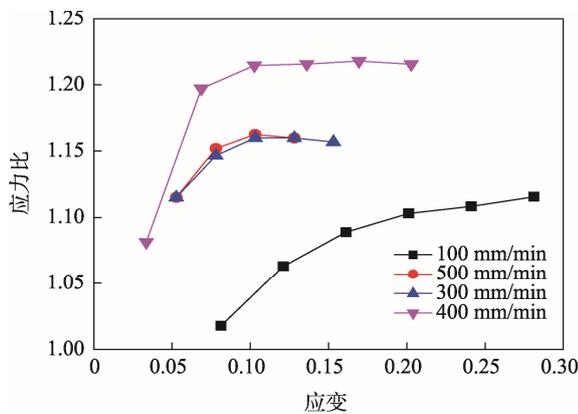


图 4 相同应变下应力的比值  
Fig.4 Ratio of stress under the same strain

变率的影响。文中应变率与应变的耦合部分选用热激活机制 Seeger<sup>[5]</sup>模型与幂函数的乘积形式作为应变率影响项。这样能够通过幂函数增长趋势来模拟应变率的影响趋势。

$$M(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = (1 + c \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}) \varepsilon^a \quad (8)$$

所以最终基于 Sherwood-Frost 模型建立的本构方程为：

$$\sigma = \left( \sum_{i=1}^n A_i \varepsilon^i + B \right) (1 + c \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}) \varepsilon^a \quad (9)$$

根据 12 mm/min 与 100 mm/min 拉伸速率下应

力、应变数据，采用 Matlab 软件基于最小二乘法对式 (9) 中的参数  $c, a$  进行拟合，得出参数  $c$  为 0.11,  $a$  为 0.07232，最终的本构方程如式 (10) 所示。

$$M(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = (1 + 0.11 \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}) \varepsilon^{0.07232} \left( \sum_{i=1}^n A_i \varepsilon^i + B \right) \quad (10)$$

耦合项的拟合质量对比见表 2，含有幂函数的耦合项拟合质量更高，因为幂函数能够较好体现应力增长趋势。

表 2 耦合项拟合质量对比

Tab.2 Comparison of fitting quality of coupling items

| 耦合项  | $\left[ 1 + c \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \varepsilon^a$ | $\left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{a\varepsilon+b}$ |
|------|---|---|
| 拟合精度 | 0.945   | 0.8509  |

## 2.4 验证本构方程有效性

本构方程拟合的曲线与在不同拉伸速度下 (100, 300, 400, 500 mm/min) 的试验数据对比结果见图 5。本构方程拟合曲线与试验数据具有较好的一致性，其中最大误差为 8.12%，出现在图 5b 曲线的末端。误差小于 10%，说明该模型具有较好的准确性。

## 3 本构模型在有限元中的应用

### 3.1 有限元模型的建立

采用 Abaqus 软件自带的建模功能，建立三维模型。为了保持与试验一致，模型尺寸的长度应与拉伸试验中材料的标距一致，长为 20 mm，模型宽为 6 mm、厚度为 2 mm。基于 Abaqus/Explicit 软件，对 PE 材料进行静态拉伸的有限元分析。

1) 设置材料属性。赋予 PE 为弹塑性材料属性。各向同性的线弹性阶段，密度为 350 kg/m<sup>3</sup>，弹性模量  $E$  为 268.4 MPa，泊松比  $\nu$  为 0.3<sup>[1]</sup>，非线性阶段采用等向强化塑性模型。由于在拉伸过程中材料发生的应变超过 10%，所以必须将名义应力、应变数据通过式 (11—12) 转化为真实应力、应变数据。

$$\varepsilon_{true} = \ln(1 + \varepsilon_{nom}) \quad (11)$$

$$\sigma_{true} = \sigma_{nom} (1 + \varepsilon_{nom}) \quad (12)$$

式中： $\varepsilon_{true}$  为真实应变； $\varepsilon_{nom}$  为名义应变； $\sigma_{true}$  真实应力； $\sigma_{nom}$  名义应力。最后通过式 (13) 定义材料塑性阶段数据。

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \quad (13)$$

式中： $\varepsilon_{pl}$  为塑性应变； $\varepsilon$  为总应变； $E$  为弹性模量； $\sigma$  为屈服应力。

2) 网格划分。三维模型比较简单，因此采用系统默认方式进行网格划分，网格尺寸设定为 0.2 mm，单元类型为线性减缩积分 C3D8R。

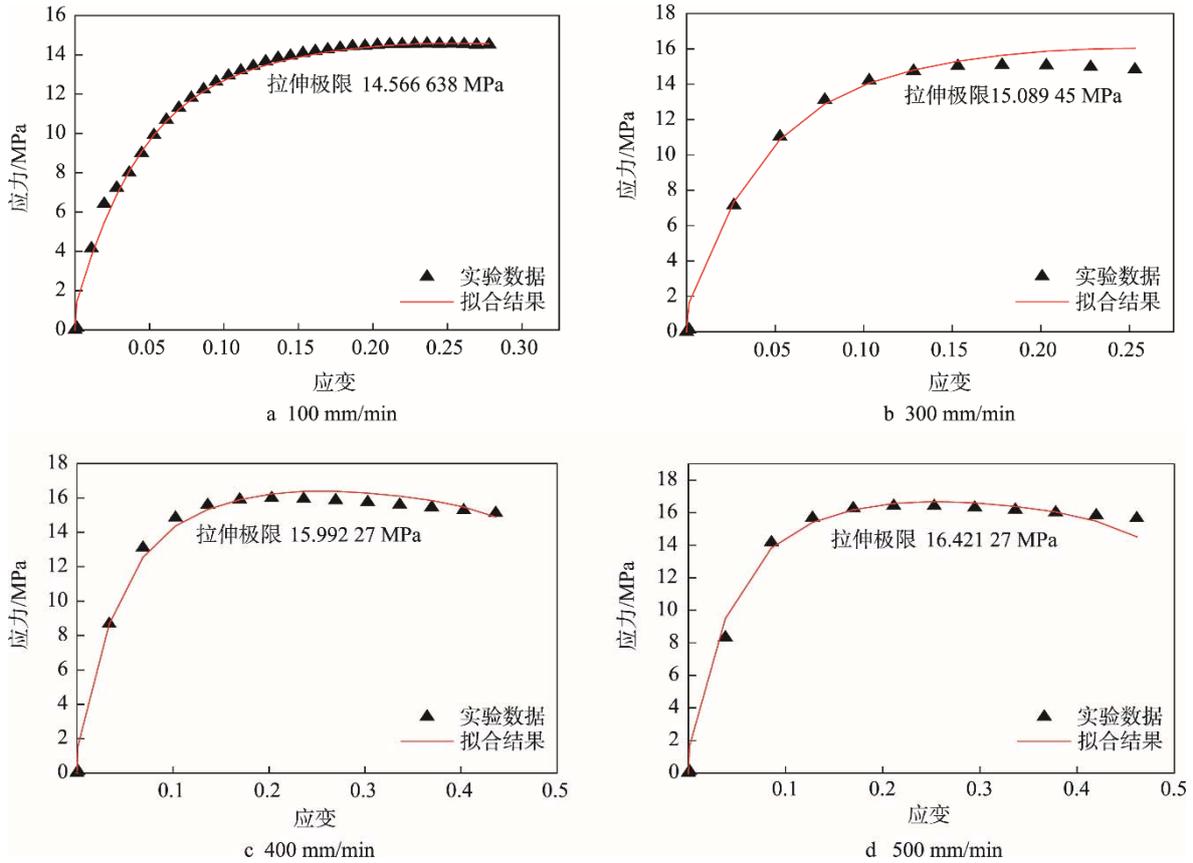


图5 本构方程拟合的曲线与在不同拉伸速度下的试验数据对比

Fig.5 Comparison of constitutive equation fitting curves with experimental data at different tensile speeds

3) 边界条件设置。三维模型一端完全固定, 另一端定义为点和面的刚性耦合, 并施加位移载荷, 指定位移为 5 mm、分析时间设置为 0.025 s、数据输出频率为 200。

### 3.2 有限元结果分析

拉伸仿真分析见图 6, Abaqus 成功地模拟出 PE 材料在拉伸试验过程中缩颈现象, 这证明了 PE 材料模型的正确性<sup>[15]</sup>。

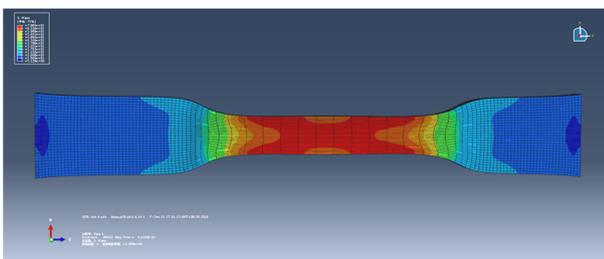


图6 拉伸仿真分析

Fig.6 Tensile simulation analysis

速度为 400, 500 mm/min 的仿真结果和试验对比见图 7, PE 材料在较小变形阶段, 仿真结果的载荷-位移曲线和试验结果的载荷-位移曲线吻合性较高。这说明改进后的本构模型能为静态仿真提供准确的材料参数, 同时也能准确描述 PE 材料的力学性能。

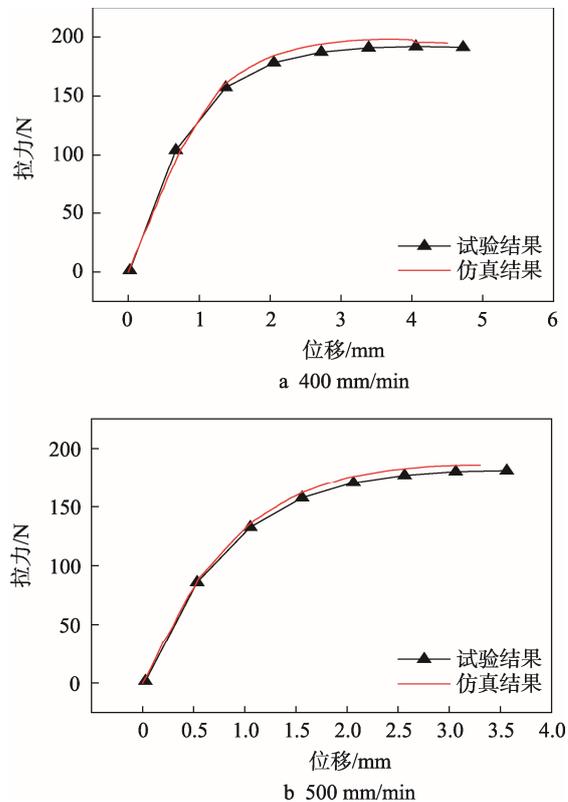


图7 速度为 400, 500 mm/min 的仿真结果和试验对比

Fig.7 Comparison of simulation results and experiments at 400 and 500 mm/min

## 4 结语

针对不同速率下的静态拉伸试验,发现应变率对PE材料的力学性能有显著影响。随着应变率增加,材料最大拉伸强度不断提高,材料出现硬化趋势;断裂伸长率随着应变率的增加逐渐降低,材料呈现脆性趋势。

通过幂函数与热激活机制 Seeger 模型,构造应变率与应变的耦合项,能够准确描述PE小变形阶段的力学性能,同时也为有限元分析提供了准确的材料参数。

### 参考文献:

- [1] CHUM P S, SWOGER K W. Olefin Polymer Technologies-history and Recent Progress at the Dow Chemical Company[J]. Prog Polym Sci, 2008, 33: 797—819.
- [2] 穆磊金. 典型聚合物材料应变率相关本构模型研究[D]. 绵阳: 西南科技大学, 2017.  
MU Lei-jin. Study on Strain-rate-dependent Constitutive Model of Typical Polymer Materials[D]. Mianyang: Southwest University of Science and Technology, 2017.
- [3] BAUWENS C C, BAUWENS J C, HOMES G. The Temperature Dependence of Yield of Polycarbonate in Uniaxial Compression and Tensile Tests[J]. Journal of Materials Science, 1972, 7(2): 176—183.
- [4] BAUWENS J C, BAUWENS C C, HOMES G. Tensile Yield-stress Behavior of Poly (Vinyl Chloride) and Polycarbonate in the Glass Transition Region[J]. Journal of Polymer Science Part A-2 Polymer Physics, 1969, 7(10): 1745—1754.
- [5] 李俊, 高德, 王振林. 低密度聚乙烯泡沫塑料压缩本构关系的研究[J]. 包装工程, 2008, 29(12): 25—26.  
LI Jun, GAO De, WANG Zhen-lin. Study on Compression Constitutive Relationship of Low Density Polyethylene Foam[J]. Packaging Engineering, 2008, 29(12): 25—26.
- [6] 马赛尔, 许进升, 童心, 等. 高密度聚乙烯单轴拉伸力学性能及本构关系研究[J]. 中国塑料, 2016, 30(4): 88—92.  
MA Sai-er, XU Jin-sheng, TONG Xin, et al. Study on the Uniaxial Tensile Properties and Constitutive Relationship of High Density Polyethylene[J]. China Plas-
- [7] 卢子兴. 聚氨酯泡沫塑料拉伸本构关系及其失效机理的研究[J]. 航空学报, 2002(2): 151—154.  
LU Zi-xing. Study on Tensile Constitutive Relationship and Failure Mechanism of Polyurethane Foam[J]. Journal of Aeronautics, 2002(2): 151—154.
- [8] MULLIKEN A D, BOYCE M C. Mechanics of the Rate-dependent Elastic-plastic Deformation of Glassy Polymers From Low to High Strain Rates[J]. International Journal of Solids & Structures, 2006, 43(5): 1331—1356.
- [9] 饶聪超, 姜献峰, 李俊源, 等. 高密度聚乙烯结构发泡塑料拉伸本构关系的研究[J]. 中国塑料, 2012, 26(7): 66—69.  
RAO Cong-chao, JIANG Xian-feng, LI Jun-yuan, et al. Research on Tensile Constitutive Relation of High-Density Polyethylene Structural Foamed Plastics[J]. China Plastics, 2012, 26(07): 66—69.
- [10] FLEISCHHAUER R, DAL H, KALISKE M, SCHNEIDER K. A Constitutive Model for Finite Deformation of Amorphous Polymers[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2012(65): 48—63.
- [11] SAFARI K H, ZAMANI J, FERREIRA F J, et al. Constitutive Modeling of Polycarbonate During High Strain Rate Deformation[J]. Polymer Engineering & Science, 2012, 53(53): 752—761.
- [12] ARRIAGA A, PAGALAI R, ZALDUA A M, et al. Impact Testing and Simulation of a Polypropylene Component. Correlation with Strain Rate Sensitive Constitutive Models in ANSYS and LS-DYNA[J]. Polymer Testing, 2010(29): 170—180.
- [13] SHERWOOD J A, FROST C C. Constitutive Modeling and Simulation of Energy Absorbing Polyurethane Foam under Impact loading[J]. Polymer Engineering & Science, 1992, 32(16): 1138—1146.
- [14] 卢富德, 高德. 蜂窝纸板一维动态本构关系及应用[J]. 振动工程学报, 2016, 29(01): 38—44.  
LU Fu-de, GAO De. One-Dimensional Dynamic Constitutive Relation of Honeycomb Paperboard and Its Application [J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(01): 38—44.
- [15] ARRIAGA A, LAZKANO J M, PAGALDAI R, et al. Chrysostomou, Finite-element Analysis of Quasi-Static Characterisation Tests in Thermoplastic Materials: Experimental and Numerical Analysis Results Correlation with ANSYS. J Polymer Testing, 2007(26): 284—305.