新型并联机器人的构型设计与运动学分析

李清[1,2]，刘荣帅[1]，丰玉玺[1]，张鹏[1]，赵立婷[1]
（1.中北大学 机械工程学院，太原 030051；2.宁波财经学院 机械与电气工程学院，宁波 315175）

摘要：目的 针对袋装食品的抓取和装箱过程操作简单且重复性高，采用人工完成的成本过高，极易发生少装和错装的现状，设计一种以 2-RPS-UPU 并联机构为主体的抓取和装箱机器人，验证其是否具有良好的运动学性能。**方法** 通过运用螺旋理论和修正的 Grubler-Kutzbach 公式对机构的自由度数目和类型进行分析，接着使用“闭环解析法”和“欧拉角表示法”2 种方法推导该机构的运动学位置反解，采用粒子群优化算法对该机构进行位置正解算例分析。最后利用 SolidWorks 软件采用“驱动动静结合”的方法求解机构的工作空间。**结果** 该机器人具有 3 个自由度（两转一移），驱动关节和末端执行器之间的位置及姿态关系明确，可以进行良好的线性运动，工作空间呈蜘蛛网状，范围广且形状规则对称，结构紧凑。**结论** 该新型三自由度并联机器人能够满足袋装食品抓取和装箱时所需的运动和工作范围，其运动平稳，可靠性强。

关键词：并联机构；装箱机器人：位置正反解；工作空间
中图分类号：TH112　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1001-3563(2020)09-0167-07
DOI：10.19554/j.cnki.1001-3563.2020.09.025

Configuration Design and Kinematics Analysis of a New Parallel Robot

LI Qing[1,2], *LIU Rong-shuai*[1], *FENG Yu-xi*[1], *ZHANG Peng*[1], *ZHAO Li-ting*[1]
(1.School of Mechanical Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China;
2.School of Mechanical and Electrical Engineering, Ningbo University of Finance & Economics, Ningbo 315175, China)

ABSTRACT: The work aims to design a grasping and packaging robot with 2-RPS-UPU parallel mechanism as the main body and verify whether it has good kinematic performance, in view of the current situation that the grasping and packaging process of bagged food is simple and repetitive, the cost of manual operation is excessively high, and it is likely to cause less and wrong loading. The number and types of degrees of freedom of the mechanism were analyzed with the screw theory and the modified Grubler-Kutzbach formula. Then, the inverse position solution to the kinematics of the mechanism was derived based on "closed-loop analytical method" and "Euler angle representation method", while the forward position solution of the mechanism was analyzed by means of particle swarm optimization algorithm (PSO). Finally, Solidworks software was used to solve the workspace of the mechanism through the "combination of driving dynamics and statics". The proposed robot had three degrees of freedom (two rotations and one movement) and clear position and attitude relationship between the driving joint and the end actuator. It could perform good linear motions. The workspace was like a spider network, featured by a wide range, regular and symmetrical shape and compact structure. The new three-degree-of-freedom parallel robot can meet the motion and working range required by grasping and packaging of bagged food, and it has stable motion and strong reliability.

KEY WORDS: parallel mechanism; packaging robot; forward and inverse position solutions; workspace

收稿日期：2019-10-28
基金项目：山西省自然科学基金（201901D111132）；浙江省公益基金（2016C31130）；宁波自然科学基金（2015A610143）
作者简介：李清（1966—），男，博士，中北大学副教授、硕导，主要研究方向为并联机构学与移动机器人。

随着生产制造业不断发展，人们对自动化要求逐渐提高，传统的制造方法（人工操作或者简单的机械生产）不断受到挑战。尤其是在传统的袋装食品包装行业，前期的食品机械生产能力大，后期的包装机械生产能力小，所以必然要采用人工的方式对袋装食品进行抓取、放置和装箱。采用人工进行食品的抓取和装箱，不仅生产效率低，劳动强度大，卫生条件差，而且劳动力短缺和用人成本增加之间的矛盾日益突出，这显然已经成为制约传统食品生产行业的主要瓶颈。工业机器人作为自动化技术的集大成者，主要包括串联机器人和并联机器人。串联机器人需要在各个关节上设置驱动装置，具有运动惯量大，负载能力低，刚度小等缺点难以实现高速和超高速操作[1]。相对于串联机器人，并联机器人具有结构强度大、承载能力强、无累计误差、运动精度高、系统动态响应快等突出优势[2]。到目前为止，对于并联机器人的研究已经取得了极大的进展，并将其应用在了各个领域。陈淼等[3]对 2-UPR-RRU 并联机构在一般和特殊位形下的自由度、运动学正反解、奇异性等问题进行了分析，使其在航天制造轻金属的焊接中有较好的应用前景。李俊帅等[4]运用螺旋理论和 Adams 等软件对 3UPS+1RPU 并联机构的自由度数目和类型进行了分析和仿真，为其以后运用在混联机床上奠定的理论基础。孟维健等[5]等应用几何法对一种具有 2 个自由度的平面并联机器人的运动性能进行分析，表明其在食品、医药行业的快速抓取和放置等方面具有优越的性能。赵耀虹等[6]用 Matlab 和 ADAMS 对一种球面并联机构的运动学和工作空间进行分析，使其在外骨骼康复训练中发挥重要作用。樊大宝等[7]提出一种对称的 3-UPRP 空间并联机构，进行了运动学分析，其在柔性包装领域具有良好的应用。上述研究表明，以不同的并联机构以多种形态实现了复杂的运动和应用。

文中针对我国袋装食品行业的实际需求，设计一种以 2-RPS-UPU 并联机构为主体的新型机器人，重点对该机器人工作时所需的自由度、工作空间和位置正反解等运动学问题进行分析与仿真，为该机器人的实际应用提供了理论基础。

1 自由度分析

1.1 2-RPS-UPU 机构描述与坐标系的建立

在初始位形下的 2-RPS-UPU 并联机构见图 1。由动平台、定平台、2 条 RPS 分支以及一条 UPU 分支组成。分支I和分支II均为 RPS 构型，运动副排列一致，并且呈对称分布，移动副（P）的两端分别与定平台转动副（R）和动平台的球副（S）相连接，分支III为 UPU 构型，移动副两端分别与动平台和定平台的虎克铰（U）连接，与动平台相连接的虎克铰第 1 转动轴平行于 z 轴，置于动平台内；第 2 转动轴平行于 y 轴。

为了便于分析，对该机构的各个运动副进行如下配置，定平台 $A_1A_2A_3$ 与动平台 $B_1B_2B_3$ 都是等腰三角形，A_1，A_2，A_3 位于定平台的 3 个顶点处，依次分别为 2 个 R 副和 U 副的质心点，B_1，B_2，B_3 位于动平台的 3 个顶点处，依次分别为 2 个 S 副和 U 副的质心点，并且 3 条分支中间都是通过 P 副连接，依次分别记为 C_1，C_2，C_3。其机构简图见图 2，将固定坐标系 O-xyz 的原点固定于定平台的几何中心 O 点处，Oxy 平面与定平台重合，x 轴指向分支III与定平台相连接的 U 副质心 A_3，z 轴垂直于定平台向上，y 轴与 x，z 轴形成右手坐标系。动坐标系 O'-uvw 的原点固定于动平台的几何中心 O'点处，$O'uv$ 平面与动平台重合，u 轴指向分支III与动平台相连接的 U 铰中心点

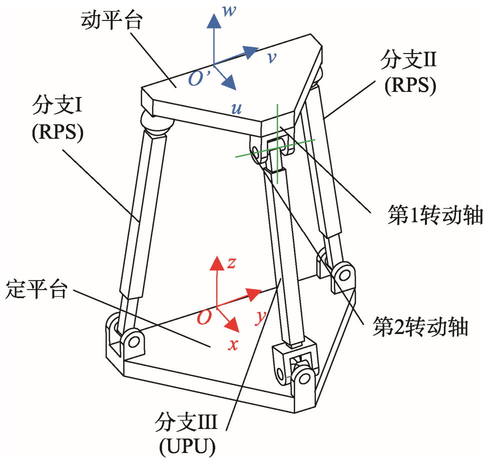


图 1 2-RPS-UPU 并联机构模型

Fig.1 2-RPS-UPU parallel mechanism model

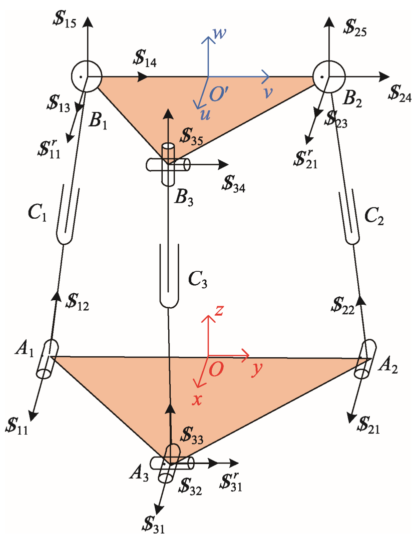


图 2 2-RPS-UPU 机构简图

Fig.2 2-RPS-UPU mechanism shetch

B_3，w 轴垂直于动平台向上，v 轴与 u，w 轴形成右手坐标系。

1.2　自由度分析

文中运用螺旋理论[8—9]对 2-RPS-UPU 并联机器人进行自由度分析。在固定坐标系下，将 3 个分支中的各个运动副用运动螺旋表示，各个运动副质心点 A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3 的位置矢量分别表示为：

$\boldsymbol{A}_1=(0\ -g\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_2=(0\ g\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_3=(e\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}_1=(0\ -h\ z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}_2=(0\ h\ z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}_3=(c\ 0\ z)^{\mathrm{T}}$

分支 1 的运动螺旋系为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\$}_{11}=(1\quad 0\quad 0;\ 0\quad 0\quad g)\\ \boldsymbol{\$}_{12}=(0\quad 0\quad 0;\ 0\quad g\quad -h\quad 0)\\ \boldsymbol{\$}_{13}=(1\quad 0\quad 0;\ 0\quad z\quad h)\\ \boldsymbol{\$}_{14}=(0\quad 1\quad 0;\ -z\quad 0\quad 0)\\ \boldsymbol{\$}_{15}=(0\quad 0\quad 1;\ -h\quad 0\quad 0)\end{cases}\tag{1}$$

对式（1）求反螺旋，可得分支 1 的约束螺旋为：

$$\boldsymbol{\$}_{11}^{r}=(1\ 0\ 0;\ 0\ z\ h)\tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{\$}_{11}^{r}$ 为平行于 x 轴并且经过球铰中心点 B_1 的约束线矢力。

同理，分支 2 的运动螺旋系为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\$}_{11}=(1\quad 0\quad 0;\ 0\quad 0\quad -g)\\ \boldsymbol{\$}_{12}=(0\quad 0\quad 0;\ 0\quad h\quad -g\quad 0)\\ \boldsymbol{\$}_{13}=(1\quad 0\quad 0;\ 0\quad z\quad -h)\\ \boldsymbol{\$}_{14}=(0\quad 1\quad 0;\ -z\quad 0\quad 0)\\ \boldsymbol{\$}_{15}=(0\quad 0\quad 1;\ h\quad 0\quad 0)\end{cases}\tag{3}$$

对式（3）求反螺旋，可得分支 2 的约束螺旋为：

$$\boldsymbol{\$}_{21}^{r}=(1\ \ 0\ \ 0;\ \ 0\quad z\quad -h)\tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{\$}_{21}^{r}$ 为平行于 x 轴并且经过球铰中心点 B_2 的约束线矢力。

分支 3 的运动螺旋系为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\$}_{31}=(1\quad 0\quad 0;\ 0\quad 0\quad 0)\\ \boldsymbol{\$}_{32}=(0\quad 1\quad 0;\ 0\quad 0\quad e)\\ \boldsymbol{\$}_{33}=(0\quad 0\quad 0;c-e\quad 0\quad z)\\ \boldsymbol{\$}_{34}=(0\quad 1\quad 0;\ -z\quad 0\quad c)\\ \boldsymbol{\$}_{35}=(0\quad 0\quad 1;\ 0\quad -c\quad 0)\end{cases}\tag{5}$$

对式（5）求反螺旋可得

$$\boldsymbol{\$}_{31}^{r}=(0\ 1\ 0;0\ 0\ c)\tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{\$}_{31}^{r}$ 为平行于 y 轴，并且经过虎克铰中心点 B_3 的线矢力。

将动平台所承受的 3 个约束线矢力用矢量形式表示，见图 3。

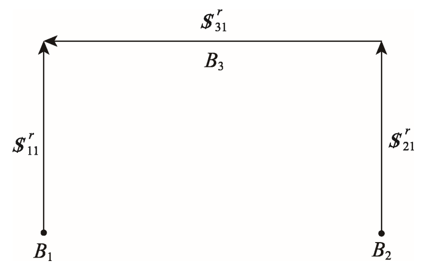


图 3　动平台所受的约束线矢力

Fig.3 Vector force of constraint line on moving platform

由图 3 可知，3 个约束线矢力共面且线性无关，约束了动平台在该平面内的 2 个移动自由度和绕该平面法线的转动自由度，所以该并联机构有 3 个自由度，即 x，y 的转动和 z 的移动。

通常采用修正的 Grubler-Kutzbach（G-K）公式分析并联机构的自由度，即：

$$M=d(n-g-1)+\sum_{i=1}^{g}f_i+\nu-\xi\tag{7}$$

式中：M 为机构的自由度；d 为机构的阶数，$d=6-\lambda$，λ 为公共约束；n 为连杆数目；g 为运动副的数目；f_i 为第 i 个运动副的自由度；ν 为机构的冗余约束。

如图 3 所示，从机构的动平台所受的约束螺旋线矢力可以得出，该机构既没有共轴的约束力也没有方向相同的约束力偶，所以该机构不存在公共约束，即 $\lambda=0$，机构的阶数为 6。很明显该机构没有冗余约束，即 $\nu=0$，没有局部自由度，即 $\zeta=0$，对 2-RPS-UPU 并联机构应用修正 G-K 公式可得：

$$M=6\times(8-9-1)+15=3\tag{8}$$

2　运动学位置分析

2.1　位置反解分析

并联机构的位置反解[10—12]即给定动平台的姿态求解相关关节变量，在文中，求解 2-RPS-UPU 并联机构的运动学位置反解，即是给定机构的尺寸参数和动平台末端点 M 的 z 方向的坐标值和动平台的姿态 (ψ, θ)，求 3 个分支移动副的位移 $q_i(i=1,2,3)$。

在 2-RPS-UPU 并联机构中，采用欧拉角 φ, θ, ψ 分别为绕 z，y，x 轴的转动，则动坐标系 O'-uvw 相对于定坐标系 O-xyz 的姿态可表示为：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_{xyz}(\psi,\theta,\varphi)=\boldsymbol{R}_z(\varphi)\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\\ \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi\end{pmatrix}\tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{R}_z(\varphi)$，$\boldsymbol{R}_y(\theta)$和 $\boldsymbol{R}_x(\psi)$分别为绕 z 轴，y 轴和 x 轴的旋转矩阵。

由于该机构并没有绕 z 轴的转动自由度，即 $\varphi=0$，所以旋转矩阵可以简化为：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_{xy}(\psi,\theta)=\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi\\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi\end{pmatrix} \tag{10}$$

运动学位置反解的关键是如何根据机构的几何特性求得约束方程。根据图 1，$\Delta A_1A_2A_3$ 和 $\Delta B_1B_2B_3$ 是相似的等腰三角形，定义一组关节的位置矢量及关节运动矢量，见表 1。

表 1 关节运动和位置矢量

Tab.1 Joint motion and position vector

表达式	物理意义
$\boldsymbol{P}=[x_0，y_0，z_0]^{\mathrm{T}}$	O'点相对于固定坐标系的位置矢量
$\boldsymbol{a}_i=[a_{ix}，a_{iy}，a_{iz}]^{\mathrm{T}}$	在定坐标系下 A_i 点的位置矢量
$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{R}[a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^{\mathrm{T}}$	在定坐标系下 B_i 点的位置矢量
$\boldsymbol{q}_i(i=1,2,3)$	各分支中驱动器的位置矢量
$\boldsymbol{c}_i(i=1,2,3)$	转动副 A_i 的轴线的位置矢量

即：

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}0 & -g & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0 & g & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}e & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}0 & -h & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}0 & h & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}c & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{12}$$

为了得到约束方程，于是令矢量 $\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{c}_2$ 分别代表转动副 A_1，A_2 单位矢量，$\boldsymbol{c}_3$ 分别代表转动 A_3 的单位矢量，则：

$$\begin{cases}\boldsymbol{c}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{c}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{c}_3=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{13}$$

由图 2 的机构简图可知，在机构运动过程中，转动副 A_i 的轴线 c_i 始终与 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}_i$ 垂直，即

$$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}_i)^{\mathrm{T}}c_i=0 \qquad i=1,2,3 \tag{14}$$

展开式（14），可得各分支的约束关系：

$$x-h\sin\theta\sin\psi=0 \tag{15}$$

$$x+h\sin\theta\sin\psi=0 \tag{16}$$

$$y=0 \tag{17}$$

将式（15）与式（16）相加，可得：

$$x=0 \tag{18}$$

根据机构的几何特性，可得闭环矢量方程：

$$\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}_i \tag{19}$$

根据闭环矢量方程得：

$$\begin{cases}\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_1\\ \quad=\left[-h\sin\theta\sin\psi,-h\cos\psi+g,z-h\cos\theta\sin\psi\right]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_2\\ \quad=\left[h\sin\theta\sin\psi,h\cos\psi-g,z+h\cos\theta\sin\psi\right]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_3=\left[\mathrm{c}\cdot\cos\theta,0,z-\mathrm{c}\cdot\sin\theta\right]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{20}$$

2-RPS-UPU 并联机构的运动学位置反解为：

$$\begin{cases}|q_1|=\\ \sqrt{(-h\sin\theta\sin\psi)^2+(-h\cos\psi+g)^2+(z-h\cos\theta\sin\psi)^2}\\ |q_2|=\\ \sqrt{(h\sin\theta\sin\psi)^2+(h\cos\psi-g)^2+(z+h\cos\theta\sin\psi)^2}\\ |q_3|=\sqrt{(c\cdot\cos\theta)^2+(z-c\cdot\sin\theta)^2}\end{cases} \tag{21}$$

2.2 位置正解分析

并联机构的位置正解是给定 3 个分支的驱动副的位移量(q_1, q_2, q_3)的情况下，求动平台位姿参数(ψ，θ，z)，这里将式（21）的非线性方程组的求解转问题化为求方程组的极小值问题，然后采用粒子群优化算法（Particle Swarm Optimization，PSO）中的自适应权重法进行求解[13—14]。

1）构造优化目标函数。

$$\begin{aligned}&f_1=\\ &\sqrt{(-h\sin\theta\sin\psi)^2+(-h\cos\psi+g)^2+(z-h\cos\theta\sin\psi)^2}-q_1\\ &f_2=\sqrt{(h\sin\theta\sin\psi)^2+(h\cos\psi-g)^2+(z+h\cos\theta\sin\psi)^2}-q_2\\ &f_3=\sqrt{(c\cdot\cos\theta)^2+(z-c\cdot\sin\theta)^2}-q_3\end{aligned} \tag{22}$$

2）粒子的适应度函数。令 $F=|f_1|+|f_2|+|f_3|$为适应度函数，当 $F<10^{-7}$时，停止迭代。

3）初始化 PSO 参数。取群体规模 $m=50$，空间维数 $D=3$，最大迭代次数 $k_{\max}=500$，初始惯性权重 $w_{\max}=0.9$，终止惯性权重 $w_{\min}=0.4$，加速度权重系数 $c_1=c_2=2$，搜索速度范围为−0.01~0.01，z 取值范围为−10~90，θ 取值范围为−0.314~0.314，Ψ 取值范围为−0.314~0.314，已知杆长 q_{i}（i=1,2,3）时，其计算结果见表 2。各算例适应度曲线见图 4。

从表 2 和图 4 显示的 3 组算例的结果可以看出，在给定驱动杆长条件的情况下，动平台的位置和姿态均得到了精确解，取到了 9 位有效数字。适应度曲线收敛快，在 25 代左右均达到了收敛，达到了求解并联机构位置正解的目的。

表 2　位置正解计算结果
Tab.2 Calculation results of forward position solution

算例	输入			输出		
	q_1/mm	q_2/mm	q_3/mm	z/mm	θ/rad	Ψ/rad
1	80	90	80	79.368 428 75	0.307 109 89	0.112 590 02
2	60	50	40	45.239 900 62	0.709 347 01	−0.160 915 11
3	70	40	60	40.553 043 87	0.134 687 61	−0.423 104 44

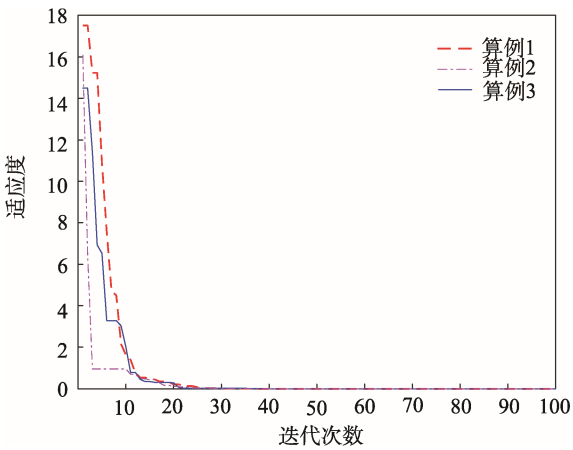


图 4　粒子群算法优化曲线
Fig.4 Particle swarm optimization curve

3　2-RPS-UPU 并联机器人工作空间分析

机器人工作空间指的是机器人末端执行器可以到达的所有位置点组成的工作区域，它的范围和大小是评价机器人性能好坏的重要指标之一。文中利用 SolidWorks 软件采用“驱动动静结合”的方法[15—16]搜索该并联机器人的可达工作空间包络面。将搜索出的所有位置点以.CSV 的格式输出导入 Matlab 软件中，通过 Matlab 编程绘制出机构工作空间的三维效果图，见图 5。

从图 5 可以看出，该并联机器人的工作空间呈蜘蛛网状，范围广且形状规则对称，没有出现空洞

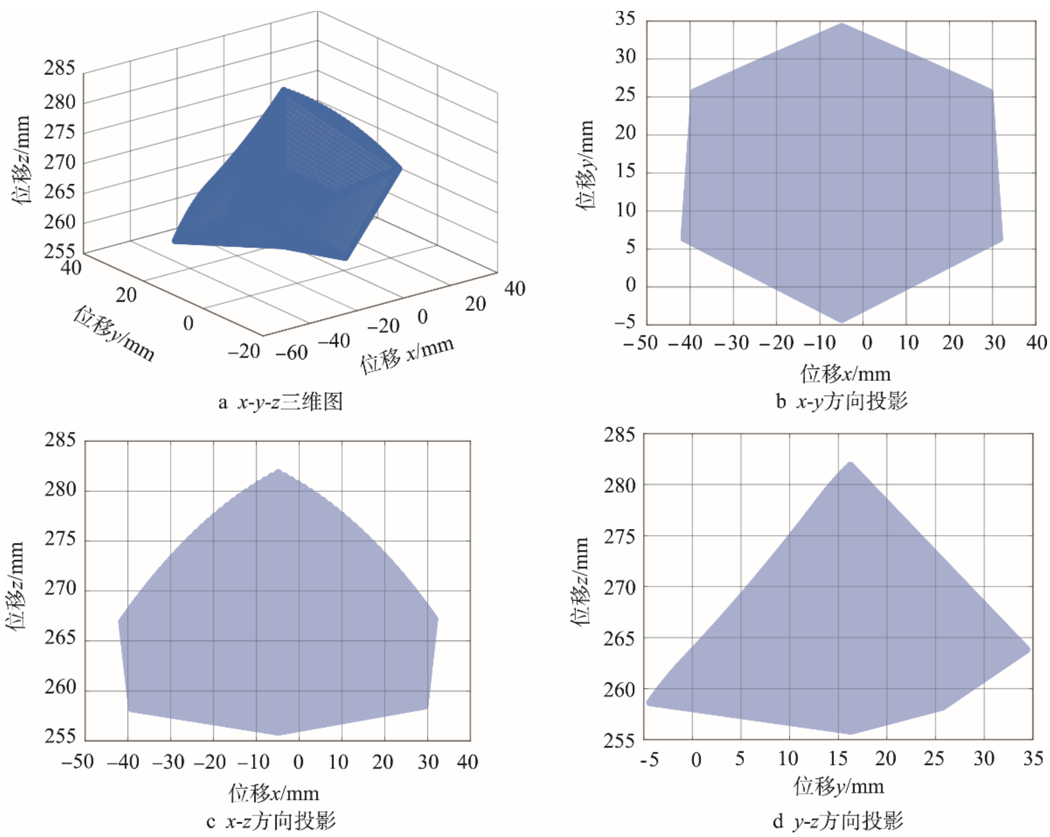
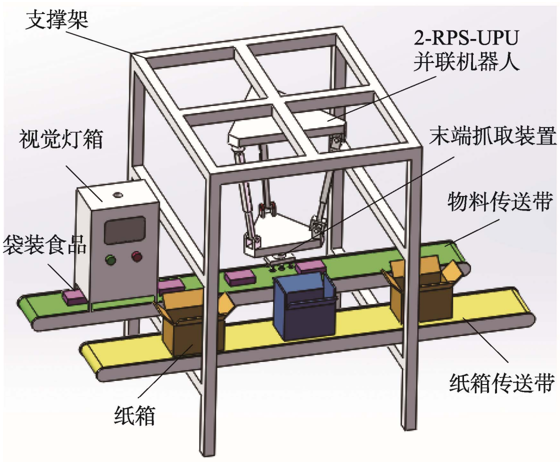


图 5　2-RPS-UPU 并联机构的可达工作空间
Fig.5 Reachable workspace of 2-RPS-UPU parallel mechanism

的现象，这表示着在已知的结构参数和限定条件下，工作空间没有出现奇异点，工作空间越大，说明机器人末端执行器可以到达的范围越广，机器人运动性能越好。

4 抓取与装箱实例介绍

在国内现有的大部分袋装产品生产线中，存在着大量的装箱作业需求。文中设计一款 2-RPS-UPU 并联机器人，与视觉系统、末端抓取装置、传送带等共同构成抓取与装箱系统，见图 6a。利用并联机器人快速、高效、精准的特点，将图 6b 所示的真空抓取末端与并联机器人动平台连接，可实现袋装食品的抓取。当袋装食品通过视觉灯箱时，触发自主识别系统，该系统可识别产品位置，确保产品识别的准确性。然后将处理结果传递给并联机器人，并联机器人通过编程分析做出动作处理方案，并通过真空抓取末端准确无误地完成抓取装箱动作。



a


b

图 6 抓取与装箱系统
Fig.6 Grasping and packaging system

5 结语

文中提出一种以 2-RPS-UPU 并联机构为主体的并联机器人，用于袋装食品的抓取和装箱。对其进行运动学分析可得出结论：该并联机构的自由度数目为 3，分别为沿 z 轴的移动和绕 x 轴、y 轴的转动运动；对该机构进行了位置运动学分析，使用“闭环解析法”和“欧拉角表示法”2 种方法推导出该机构的运动学位置反解，使用粒子群优化算法得到了并联机构精确的位置正解，明确了驱动关节和末端执行器之间的位置及姿态关系，可以进行良好的线性运动；借助 SolidWorks 和 Matlab 软件对该机器人的工作空间进行搜索和绘制，所得到的工作空间呈蜘蛛网状，范围广且形状规则对称，结构紧凑，没有出现奇异点。这些工作为该并联机器人抓取和装箱等实际应用提供了坚实的理论基础。

参考文献：

[1] 田海波，马宏伟，马琨，等. 一种三构态变胞并联机构运动学及工作空间分析[J]. 机器人，2019，41(3): 414—424.
TIAN Hai-bo, MA Hong-wei, MA Kun, et al. Kinematics and Workspace Analysis of a Kind of Three State Metamorphic Parallel Mechanism[J]. Robot, 2019, 41(3): 414—424.
[2] 李剑锋，张凯，张雷雨，等. 并联踝康复机器人的设计与运动性能评价[J]. 机械工程学报，2019，55(9): 29—39.
LI Jian-feng, ZHANG Kai, ZHANG Lei-yu, et al. Design and Performance Evaluation of Parallel Ankle Rehabilitation Robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(9): 29—39.
[3] 陈淼，张氢，葛韵斐，等. 2UPR-RRU 并联机构及其运动学分析[J]. 北京航空航天大学学报，2019(6): 1145—1152.
CHEN Miao, ZHANG Qing, GE Yun-fei, et al. 2UPR-RRU Parallel Mechanism and its Kinematic Analysis[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2019(6): 1145—1152.
[4] 李俊帅，马春生，李瑞琴，等. 新型混联机床主体—3UPS+1RPU 并联机构的自由度分析与仿真[J]. 科学技术与工程, 2017(8): 165—169.
LI Jun-shuai, MA Chun-sheng, LI Rui-qin, et al. Analysis and Simulation of DOF of 3UPS+1RPU Parallel Mechanism as the Main Body of New Hybrid Machine Tool[J]. Science and Technology and Engineering, 2017(8): 165—169.
[5] 孟维健，张艳伟，程建豪，等. 一种装箱作业并联机

器人机构的运动性能[J]. 包装工程, 2017, 38(5): 82—87.
MENG Wei-jian, ZHANG Yan-wei, CHENG Jian-hao, et al. Kinematic Performance of a Parallel Robot Mechanism for Packing Operation[J]. Packaging Engineering, 2017, 38(5): 82—87.

[6] 赵耀虹, 夏昊, 夭银银, 等. 球面外骨骼并联机构的运动学及工作空间分析[J]. 生物医学工程学杂志, 2019, 36(2): 43—52.
ZHAO Yao-hong, XIA Hao, YAO Yin-yin, et al. Kinematics and Workspace Analysis of Spherical Exoskeleton Parallel Mechanism[J]. Journal of Biomedical Engineering, 2019, 36(2): 43—52.

[7] 樊大宝, 孙虎儿, 李瑞琴, 等. 一种新型 3-UPRP 并联机构的运动学分析[J]. 包装工程, 2018, 39(7): 168—172.
FAN Da-bao, SUN Hu-er, LI Rui-qin, et al. Kinematic Analysis of a New 3-UPRP Parallel Mechanism[J]. Packaging Engineering, 2018, 39(7): 168—172.

[8] 于靖军, 刘辛军, 丁希仑. 机器人机构学的数学基础(第 2 版)[M]. 北京: 机械工业出版, 2016: 78—121.
YU Jing-jun, LIU Xin-jun, DING Xi-lun. Mathematic Foundation of Mechanisms and Robotics[M]. Beijing: China Machine Press, 2016: 78—121.

[9] SCHREIBER L T, GOSSELIN C. Kinematical Redundant Planar Parallel Mechanisms: Kinematics, Workspace and Trajectory Planning[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 119: 91—105.

[10] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学(第 2 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 114—152.
HUANG Zhen, ZHAO Yong-sheng, ZHAO Tie-shi. Higher Space Institutions[M]. Beijing: Higher Education Press, 2014: 114—152.

[11] REZAEI A, AKBARZADEH A. Study on Jacobian, Singularity and Kinematics Sensitivity of the FUM 3-PSP Parallel Manipulator[J]. Mechanism & Machine Theory, 2015, 86(2): 211—234.

[12] 张伟中, 徐灵敏, 童俊华, 等. 2-PUR-PSR 并联机构的运动学分析及尺度综合[J]. 机械工程学报, 2018, 54(7): 45—53.
ZHANG Wei-zhong, XU Ling-min, TONG Jun-hua, et al. Kinematics Analysis and Scale Synthesis of 2-PUR-PSR Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(7): 45—53.

[13] AKHBARI S, GHADIMZADEH ALAMDARI A, MAHBOUBKHAH M, et al. Circular Motion Analysis for a Novel 4-DOF Parallel Kinematic Machine[J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2019, 41(5): 215.

[14] 王磊, 李双喜, 朱乔峰, 等. 基于 PSO-BP 的调控型气体密封状态参数智能计算方法研究[J]. 流体机械, 2017, 45(11): 10—16.
WANG Lei, LI Shuang-xi, ZHU Qiao-feng, et al. Intelligent Computing Method of State Parameters for RGS Based on PSO-BP[J]. Fluid Machinery, 2017, 45(11): 10—16.

[15] 沈惠平, 赵迎春, 许可, 等. 一种可重构、部分运动解耦的空间 n 维平移 1 维转动并联机构的拓扑及其运动学设计[J]. 中国机械工程, 2019, 30(4): 39—48.
SHEN Hui-ping, ZHAO Ying-chun, XU Ke, et al. Topology and Kinematics Design of a Reconfigurable, Partially Motion Decoupled Spatial N-Dimensional Translational 1-Dimensional Rotational Parallel Mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(4): 39—48.

[16] 张彦斌, 荆献领, 韩建海, 等. 新型 RR-RURU 踝关节康复机器人机构的设计与分析[J]. 中国机械工程, 2019, 30(14): 1734—1741.
ZHANG Yan-bin, JING Xian-ling, HAN Jian-hai, et al. Design and Analysis of a New RR-RURU Ankle Rehabilitation Robot Mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(14): 1734—1741.