

空间 4R 球面机构作为转动副的 3RPS 并联机构运动学分析

刘伟^{1,2}, 曹亚斌^{1,2}

(1.西安工程大学 机电工程学院,西安 710660;2.西安市现代智能纺织装备重点实验室,西安 710660)

摘要: **目的** 设计一种新型 3RsPS 并联机构,使得机构可以输出 3 个转动自由度与 3 个移动自由度耦合的运动。**方法** 根据机构的几何关系,在 4R 空间机构连杆运动学分析的基础上,建立该机构的运动学方程,使用消元法对其运动学正、逆解进行了求解。使用空间 4R 机构替换 3RPS 并联机构的转动副,使得该机构在初始位形下的结构,与 3RPS 并联机构等效。**结果** 使用 Matlab 计算得到了运动学方程消元后方程的最高次数,从而得到了运动学正解最多的个数。该机构具有 3 个自由度,3 个移动输出和 3 个转动输出耦合,机构的运动学正解最多有 16 个,这与 3RPS 最多拥有的正解数目一致。**结论** 得到了一种新型的 3RsPS 机构,该机构的特征为 R_s 副的转动轴线是在空间变化的,该机构的输出为三维移动伴随三维转动,具有此类运动模式的并联机构在不规则形状的产品分拣筛选时,具有一定应用前景。

关键词: 4R 球面机构;运动学正解;并联机构

中图分类号:TB486;TH112 文献标识码:A 文章编号:1001-3563(2020)11-0189-07

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2020.11.027

Kinematics Analysis of 3RPS Parallel Mechanism with Spatial 4R Spherical Mechanisms as Rotating Pairs

LIU Wei^{1,2}, CAO Ya-bin^{1,2}

(1.School of Mechanical & Electrical Engineering, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710660, China;
2.Xi'an Key Laboratory of Modern Intelligent Textile Equipment, Xi'an 710660, China)

ABSTRACT: The work aims to design a new type of 3RsPS parallel mechanism that can output the motion of three rotation freedom degrees coupled with three movement freedom degrees. Based on the geometric relationship of the mechanism and kinematics analysis of the connecting rod of 4R spatial mechanism, the kinematics equation of the mechanism was established. The forward and inverse kinematics solutions of the mechanism were solved by elimination method. The rotating pair of 3RPS parallel mechanism was replaced by 4R spatial mechanism, so that the structure of 3RPS parallel mechanism under the initial configuration was equivalent to that of 3RPS parallel mechanism. The highest number of equations after elimination of kinematics equation was obtained by calculation through MATLAB, and the maximum number of the forward kinematics solution was obtained. The mechanism had three freedom degrees and three movement outputs coupled with three rotation outputs. The maximum forward kinematics solutions of the mechanism were 16, consistent with the number of positive kinematics solutions of 3RPS. A new type of 3RsPS mechanism is obtained. The feature of the mechanism is that the rotation axis of R_s pair changes in space, and the output of the mechanism is three-dimensional movement accompanied by three-dimensional rotation. The motion characteristics of the mechanism

收稿日期: 2019-08-09

基金项目: 科技创新平台建设工程/重点实验室建设项目(2019220614SYS021CG043)

作者简介: 刘伟(1985—),男,西安工程大学讲师,主要研究方向为并联机构及机构学。

通信作者: 曹亚斌(1976—),女,博士,西安工程大学讲师,主要研究方向为车辆设计。

have certain application value in the field of efficient packaging sorting and screening.

KEY WORDS: 4R spherical mechanism; forward kinematics; parallel mechanism

不规则形状的产品在包装分拣时经常使用振动筛来实现。振动筛一般按照一定运动规律往复运动。为提高对不规则形状产品分拣的效率,提升振动筛筛选产品时的随机性,可使用多自由度空间机构来实现。多自由度机构的制造成本和控制难度较大,能实现复杂三维移动耦合三维转动的空间运动的机构在高效包装分拣筛选领域具有一定应用价值。

并联机构可实现此类运动且具有高刚度、高加速度。关于并联机构的型综合的研究,近些年来主要集中在通过降低机构的耦合来提升并联机构运动性能和可控性^[1]、增大机构的耦合来提升机构刚度^[2-3]、提升并联机构的可重构性^[3-4]适应不同的工作需要^[5]。同时一些具有新型运动模式的并联机构也被相继提出,研究和设计具有新型运动模式特征的机构是机构学理论研究的一个热点,并且该方面的研究在理论和实用方面都有具有一定价值。

3-RPS 是 hunt 提出的一类特殊的 2R1T 并联机构,李秦川教授^[6]研究了其没有伴随运动的条件。NURAHMI L^[7]使用代数几何学对其操作模式进行了研究。ZHANG^[8]使用过约束 3-RRR 并联机构作为可重构结构,设计一种可重构的 3PRS 机构。黄真设计了一种具有 3 个转动自由度^[9]和 3 个移动自由度的 3 自由度 3RPS 并联机构,并使用螺旋理论对动平台具有的运动形式进行了全面的分析。DUAN Z^[10]使用定瞬心轨迹和动瞬心轨迹对动平台的运动对 2R1T 并联机构的运动进行分类。NAYAK A^[11]对 3SPR 和 3RPS 并联机构进行了性能比较。GALLARDO^[12]设计了具有双层结构的 2-3RPS 并联机构,并使用旋量理论对其进行了运动学分析。文献研究了一种新型的 3RPS 具有的螺旋运动。GAN D^[13]使用新型的运动副,设计了一种 3 支链可重构并联机构。现有文献主要集中于研究 3RPS 并联机构的性能,且消除或强化 3RPS 并联机构伴随运动的方法较为单一,主要通过调整支链布置的方式来实现。

FANG Y F^[14]提出的 4-RUC 并联机构能实现 3 个移动和 1 个转动自由度的并联机构,这种并联机构的运动模式既不属于转动轴线分岔的 3T1R 并联机构,也不属于一般的 3T1R 运动,即转动轴线方向是固定的 Schoenflies 运动。4-RUC 并联机构动平台的运动模式比较特殊,使用 3 个正交的移动副与空间 4R 闭环机构进行串联,4R 闭环机构输出构件的运动模式与其相同。在这一研究的启发下,YANG S^[15]提出了具有转动轴线在空间变化的 3T1R 并联机构。闭环空间 4R 球面机构的输出构件具有 1 个转动自由度,这个

转动自由度的转动轴线在空间中会发生改变。当 2 个独立的移动副串联一个闭环空间 4R 球面机构,空间 4R 球面机构上输出杆件的运动模式,是一种新型的 3T1R 运动模式。空间 4R 球面机构具有一维自由度,其输出构件具有在空间中转动的一维自由度,而传统的 3RPS 并联机构中连接定平台的转轴轴线也是一维转动自由度。受上述研究结果的启发,把 3RPS 中的转动副 R,使用球面 4R 机构进行替代,得到一种新型的 3R_SPS 并联机构。3R_SPS 并联机构支链 R_SPS 中 R_S 的下标 S 表示球面,R_S 表示具有一维的球面运动。

综上所述,传统的 3RPS 并联机构转动副轴线位置与方向固定,此类机构可分为具有伴随运动和无伴随运动的 3RPS 并联机构。文中设计的 3R_SPS 并联机构,转动副轴线方向在动平台运动过程中,轴线方向发生变化,动平台将产生移动与转动耦合的空间运动,使得其可在包装分拣筛选领域具有一定应用前景。

1 机构模块的结构几何关系

1.1 3RPS 并联机构

Hunt 在 1983 年提出的 3RPS 并联机构见图 1,定平台为 A₁A₂A₃,点 A₁,A₂,A₃在以点 O 为圆心的圆周上均匀分布,圆 O 的半径为 R。动平台为 B₁B₂B₃,点 B₁,B₂,B₃在以 o 为圆心的圆周上均匀分布,圆 o 的半径为 r。动、定平台通过 3 条支链 A₁B₁,A₂B₂,A₃B₃ 相连,支链的运动链结构为 RPS。点 A₁,A₂,A₃ 处布置转动副,转动副轴线与圆 O 共面,转动副与其所在支链移动副 P 垂直。

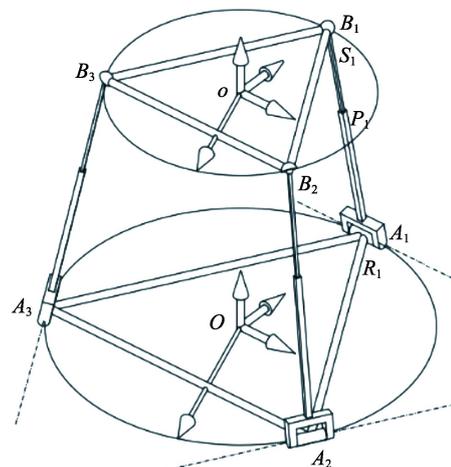


图 1 3RPS 并联机构简图
Fig.1 Sketch of 3RPS parallel mechanism

1.2 4R 球面机构

如图 2 所示，转动副 R_1, R_2 间夹角为 45° ， R_4 与 R_3 间夹角为 45° ， R_1 与 R_4 间夹角为 90° ， R_2 与 R_3 间夹角为 60° 。连接 R_1 与 R_2, R_2 与 R_3, R_3 与 R_4 的 3 个弧形杆件的半径均为 R_s 。 R_1 沿着 x 轴方向， R_4 沿着 y 轴方向。图 2 中 R' (虚线所示轴线) 是转轴 R_1, R_2 所在平面 π_1 ，与转轴 R_3, R_4 所在平面 π_2 的交线， R' 是连接 R_2 与 R_3 的连杆绕点 o 的瞬时转动轴线。

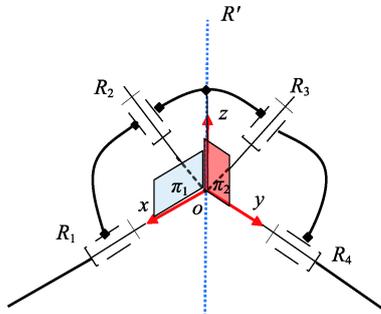


图 2 空间 4R 球面机构简图
Fig.2 Sketch of 4R spatial spherical mechanism

空间 4R 球面机构具有 1 个转动自由度，这个转动自由度的转动轴线绕一点做旋转。把 3RPS 并联机构中，支链中的转动副 R ，使用球面 4R 并联机构代替，可得到一种特殊的 3R_sPS 并联机构 (R_s 表示图 2 中连接转轴 R_2, R_3 的连杆所具有转动特征的运动副)。

2 并联机构

如图 3 所示，3R_sPS 并联机构的 3 条支链中，球面 4R 机构 R_s 的转动中心，为 A_1, A_2, A_3 。在图 3 所示位形下，3 条支链中，球面 4R 机构连接移动副杆件的瞬时转动轴线为 R'_1, R'_2, R'_3 。在图 3 所示机构位形下，3 条支链中的移动副的移动方向与轴线 R'_1, R'_2, R'_3 对应垂直。很明显，这种新型的 3R_sPS 并联机构在图 3 所示位形下，与一般的 3RPS 并联机构等效。

在等边三角形动、定平台中心，建立坐标系 $oxyz$ ， $OXYZ$ ，在图 3 所示机构位形下，坐标系 $oxyz$ 与 $OXYZ$ 坐标轴对应平行。在定平台上点 $A_i (i=1, 2, 3)$ 处建立局部坐标系，以图 4 为例，对这 3 个局部坐标系进行说明。支链 1 与定平台连接点 A_1 处的空间 4R 球面机构见图 4。

局部坐标系 $o_{11}x_{11}y_{11}z_{11}$ 姿态矩阵变换到定坐标系 $OXYZ$ 的变换矩阵见图 4，使用 zyx 欧拉角表示为：

$${}^oR_{11} = R_{z11}(180^\circ) \cdot R_{y11}(-90^\circ) \quad (1)$$

先使得局部坐标系 $o_{11}x_{11}y_{11}z_{11}$ 与定坐标 $OXYZ$ 坐标轴对应平行，将局部坐标系 $o_{11}x_{11}y_{11}z_{11}$ 绕 z_{11} 轴转

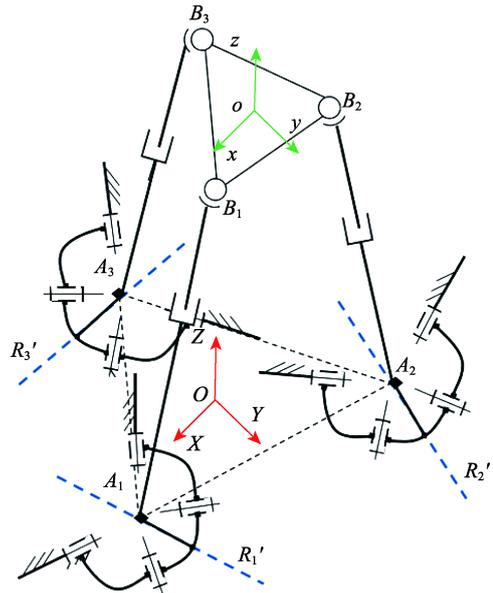


图 3 3R_sPS 并联机构简图
Fig.3 Sketch of 3R_sPS parallel mechanism

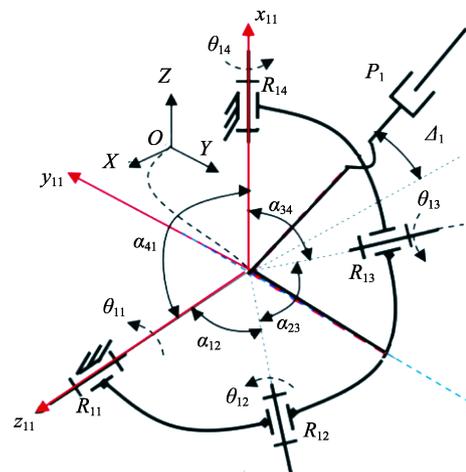


图 4 支链 1 中的球面 4R 机构简图
Fig.4 Sketch of spherical 4R mechanism in branch chain 1

动角 180° ，再绕转动后的局部坐标系 $o_{11}x_{11}y_{11}z_{11}$ 的坐标轴 y'_{11} 转动角 -90° 。同理，可以得到 $A_i (i=1, 2, 3)$ 处与空间 4R 机构固联的局部坐标系与定坐标系之间的变换矩阵 ${}^oR_{21}, {}^oR_{31}$ 。从图 3 可以发现，轴线 R'_1 绕定坐标系 Z 轴，即局部坐标系 x_{i1} 转动 $120^\circ, 240^\circ$ 后，得到轴线 R'_2, R'_3 ，变换矩阵 ${}^oR_{21}, {}^oR_{31}$ 见式 (2—3)。

$${}^oR_{21} = R_{x21}(120^\circ)R_{z21}(180^\circ)R_{y21}(-90^\circ) \quad (2)$$

$${}^oR_{31} = R_{x31}(240^\circ)R_{z31}(180^\circ) \cdot R_{y31}(-90^\circ) \quad (3)$$

支链 B_1A_1 施加在动平台上的约束旋量为过 B_1 点，与 A_1 点处空间 4R 球面机构连杆的瞬时转动轴线平行的约束力。同理，支链 2, 3 在动平台上施加的约束力为过 B_2, B_3 点的力旋量。在图 3 所示位形下，动平台上施加的 3 个力旋量共面，其组成的旋量系秩

为3。可以发现,3-RsPS 并联机构在图3所示位形下,与3RPS 并联机构相同,其自由度为3,具有沿X, Y轴的转动自由度和沿Z轴的移动自由度。然而,3-RsPS 并联机构的约束旋量系与3RPS 并联机构的约束旋量系有着明显的区别。由于空间4R 球面机构的连杆的瞬时转动轴线方向在不断变化,当图3所示并联机构动平台离开图示位形后,3条支链中 A_i 点处的约束旋量方向会发生变化。值得注意的是,在一般位形下,上述3个约束力旋量线性无关,因而3-RsPS 并联机构的自由度与3-RPS 并联机构的自由度相同,其自由度为3。

3 并联机构运动学分析

3.1 球面4R 机构连杆的位移分析

空间4R 机构的运动学方程为式(4),式(4)中 a_{ij} 表示转轴*i*和转轴*j*之间的夹角。根据式 $Z_{12}=c_{34}$,可以建立转动副 R_{i1} 转角 θ_{i1} 与转动副 R_{i2} 转角 θ_{i2} 之间的关系,从而根据局部坐标系“2”到局部坐标系“1”的姿态变换矩阵,可以计算连杆 a_{i23} (即支链*i*连接转轴 R_{i2} 和转轴 R_{i3} 的连杆)上任意矢量的姿态随转动副 R_{i1} 转动的关系。转动副 R_{i1} 转角 θ_{i1} 与转动副 R_{i2} 转角 θ_{i2} 之间的关系见式(4)。

$$\begin{aligned} Z_{12} &= c_{34} \\ Z_{12} &= s_{23}(X_1s_2 + Y_1c_2) + c_{23}Z_1 \\ X_1 &= s_{41}s_1 \\ Y_1 &= -(s_{12}c_{41} + c_{12}s_{41}c_1) \\ Z_1 &= c_{12}c_{41} - s_{12}s_{41}c_1 \\ c_{34} &= s_{23}(s_{41}s_1s_2 - c_{23}s_{12}c_{41} - c_{12}s_{41}c_1c_2) + c_{23}(c_{12}c_{41} - s_{12}s_{41}c_1) \end{aligned} \tag{4}$$

整理后得到:

$$s_{23}s_{41}s_1s_2 - s_{23}s_{12}c_{41}c_2 - s_{23}c_{12}s_{41}c_1c_2 + c_{23}c_{12}c_{41} - c_{23}s_{12}s_{41}c_1 - c_{34} = 0 \tag{5}$$

根据万能代换公式:

$$c_i = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}; s_i = \frac{2t_i}{1+t_i^2} \tag{6}$$

式(5)可写成式(7)的形式:

$$\begin{aligned} &4t_1t_2s_{23}s_{41} - (1-t_2^2)(1+t_1^2)s_{23}s_{12}c_{41} - \\ &(1-t_1^2)(1-t_2^2)s_{23}c_{12}s_{41} + c_{23}c_{12}c_{41}(1+t_1^2)(1+t_2^2) - \\ &(1-t_1^2)(1+t_2^2)c_{23}s_{12}s_{41} - c_{34}(1+t_1^2)(1+t_2^2) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

整理式(7)得到:

$$K_{11}t_1^2t_2^2 + K_{12}t_1^2 + K_{13}t_2^2 + K_{14}t_1t_2 + K_{15} = 0 \tag{8}$$

式中: $K_{11} = s_{23}s_{12}c_{14} - s_{23}c_{12}s_{14} + c_{23}s_{12}s_{14} + c_{23}s_{12}s_{14} - c_{34}$, $K_{12} = -s_{23}s_{12}c_{14} + s_{23}c_{12}s_{14} + c_{23}s_{12}s_{14} + c_{23}s_{12}s_{14} - c_{34}$, $K_{13} = s_{23}s_{12}c_{14} + s_{23}c_{12}s_{14} + c_{23}s_{12}c_{14} - c_{23}c_{12}s_{14} - c_{34}$, $K_{14} = 4s_{23}s_{14}$, $K_{15} = -s_{23}s_{12}c_{14} - s_{23}c_{12}s_{14} + c_{23}c_{12}c_{14} - c_{23}s_{12}s_{14} - c_{34}$ 。
将 $\alpha_{12}=45^\circ, \alpha_{23}=60^\circ, \alpha_{34}=45^\circ, \alpha_{14}=-90^\circ, \theta_1=0^\circ$

代入式(8),得到: $K_{13}t_2^2 + K_{15} = 0, K_{13} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$$K_{15} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, t_2 = \pm(2-\sqrt{3}), c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta_2 = \pm 60^\circ。$$

结合图4位形,取 $\theta_{12}=60^\circ$,3条支链中,空间4R 机构连杆的所在坐标系“ $i2$ ”($i=1, 2, 3$)与支链*i*中的转角 θ_{i1}, θ_{i2} ,以及杆件的尺寸参数有关,从而可以建立空间4R 球面机构连杆局部坐标系“ $i2$ ”相对于定坐标系的姿态变换矩阵。假设图3所示机构位形为初始位形,3条支链的移动副轴线和定平台可形成正四面体,根据正四面体的几何特征可知,过定平台上 A_1, A_2, A_3 的外接圆半径为 R_A ,过动平台上 B_1, B_2, B_3 的外接圆半径为 R_B ,正四面体的3条棱和底面的夹角 Δ_1 为 $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ 。

支链1中的移动副的方向矢量在坐标系“11”中为:

$${}^{11}P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T \tag{9}$$

图3所示机构初始位形下,转轴 R_{11} 和 R_{12} 的位置见图4,将 $\theta_{11}=0^\circ$ 代入式(8)得到 $\theta_{12}=60^\circ$,移动副的矢量方向在支链1的坐标系2中为:

$$\begin{aligned} {}^{11}R_{12} &= R_{x11'}(45^\circ)R_{z12'}(60^\circ) \\ {}^{12}R_{11} &= ({}^{11}R_{12})^{-1} \\ {}^{12}P_1 &= {}^{12}R_{11} {}^{11}P_1 \end{aligned} \tag{10}$$

考虑到转动副 R_{11} 和 R_{12} 转动的角度,那么支链1的局部坐标系2表示为“12”变换到定坐标系“O”可表示为:

$${}^O R_{12} = {}^O R_{11} R_{z11}(\theta_{11}) R_{x11'}(45^\circ) R_{z12'}(\theta_{12}) \tag{11}$$

3.2 3RsPS 并联机构运动学分析

3.2.1 运动学正解。

将支链1中移动副的方向矢量变换到定坐标系中为:

$${}^O P_1 = {}^O R_{12} \cdot {}^{12} P_1 \tag{12}$$

同理,可以得到支链2,3的移动副方向矢量的方程。矢量 $B_i A_i$ 与支链*i*的移动副方向相同,可得到方程:

$${}^O P_i = \frac{1}{l_i} \cdot \begin{bmatrix} {}^O x_{B_i} - {}^O x_{A_i} \\ {}^O y_{B_i} - {}^O y_{A_i} \\ {}^O z_{B_i} - {}^O z_{A_i} \end{bmatrix} \tag{13}$$

式中: ${}^O x_{B_i}, {}^O y_{B_i}, {}^O z_{B_i}, {}^O x_{A_i}, {}^O y_{A_i}, {}^O z_{A_i}$ 分别为点 B_i, A_i 在定坐标系中的位置坐标。根据第2节内容的分析,可知,3RsPS 并联机构具有3个自由度,一般情况下,3条支链在动平台上施加的约束力不共面、不平行时,动平台空间6个位置姿态参数只有3个是

独立的。设动平台坐标系变换到定坐标系的变换矩阵为：

$${}^oR_o = \begin{pmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{pmatrix} \quad (14)$$

式 (14) 的变换矩阵 9 个元素中只有 3 个是独立的，其他 6 个元素可以通过下列关系求得：

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1 \quad (15)$$

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1 \quad (16)$$

$$l_x m_x + l_y m_y + l_z m_z = 0 \quad (17)$$

$$n_x = l_y m_z - l_z m_y \quad (18)$$

$$n_y = l_z m_x - l_x m_z \quad (19)$$

$$n_z = l_x m_y - l_y m_x \quad (20)$$

动平台坐标系原点 o 在定坐标系中的坐标为：

$${}^o o = [{}^o x_o \quad {}^o y_o \quad {}^o z_o]^T \quad (21)$$

定平台上点 A_i 在定坐标系中为：

$$[{}^o x_{A_i} \quad {}^o y_{A_i} \quad {}^o z_{A_i}]^T = [a_i \quad b_i \quad 0]^T \quad i=1,2,3 \quad (22)$$

动平台上点 B_i 在动坐标系中为：

$$[{}^o x_{B_i} \quad {}^o y_{B_i} \quad {}^o z_{B_i}]^T = [p_i \quad q_i \quad 0]^T \quad i=1,2,3 \quad (23)$$

式 (23) 中 B_i 在定坐标系的坐标可采用坐标变换得到：

$$\begin{bmatrix} {}^o x_{B_i} \\ {}^o y_{B_i} \\ {}^o z_{B_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i l_x + q_i m_x + {}^o x_o \\ p_i l_y + q_i m_y + {}^o y_o \\ p_i l_z + q_i m_z + {}^o z_o \end{bmatrix} \quad i=1,2,3 \quad (24)$$

根据式 (13)，式 (24)，运动链 i 得到的约束方程为：

$${}^o P_i = \frac{1}{L_i} \begin{pmatrix} p_i l_x + q_i m_x + {}^o x_o - a_i \\ p_i l_y + q_i m_y + {}^o y_o - b_i \\ p_i l_z + q_i m_z + {}^o z_o \end{pmatrix} \quad (25)$$

$${}^o P_i = [u_i \quad v_i \quad w_i] \quad i=1,2,3 \quad (26)$$

$$w_i L_i = p_i l_z + q_i m_z + {}^o z_o \quad (27)$$

式 (25) 中 L_i 为中间变量，根据式 (27) 可消去 L_i 。式 (25—26) 可得到 2 个独立的方程。容易发现，其中不存在未知数 n_x, n_y, n_z ，且变量 u_i, v_i, w_i 与支链 i 驱动转动副的转角 θ_{i1} 有关。这样在位置正解中只要求解 9 个未知数，所以只要 9 个方程即可。这 9 个方程为 (15—17)，根据式 (25—26) 得到支链 $i(i=1, 2, 3)$ 得到 6 个方程。

$$p_i l_x + q_i m_x + {}^o x_o - p_i l_z \frac{u_i}{w_i} - q_i m_z \frac{u_i}{w_i} - {}^o z_o \frac{u_i}{w_i} - a_i = 0 \quad (28)$$

$$p_i l_y + q_i m_y + {}^o y_o - p_i l_z \frac{v_i}{w_i} - q_i m_z \frac{v_i}{w_i} - {}^o z_o \frac{v_i}{w_i} - b_i = 0 \quad (29)$$

式 (28—29) 是关于变量 $l_x, l_y, l_z, m_x, m_y, m_z, x_o, y_o, z_o$ 的线性方程，可以将 $m_x, m_y, m_z, x_o, y_o,$

${}^o z_o$ 使用 l_x, l_y, l_z 表示：

$$\begin{bmatrix} q_1 & 0 & -q_1 \frac{u_1}{w_1} & 1 & 0 & -\frac{u_1}{w_1} \\ q_2 & 0 & -q_2 \frac{u_2}{w_2} & 1 & 0 & -\frac{u_2}{w_2} \\ q_3 & 0 & -q_3 \frac{u_3}{w_3} & 1 & 0 & -\frac{u_3}{w_3} \\ 0 & q_1 & -q_1 \frac{v_1}{w_1} & 0 & 1 & -\frac{v_1}{w_1} \\ 0 & q_2 & -q_2 \frac{v_2}{w_2} & 0 & 1 & -\frac{v_2}{w_2} \\ 0 & q_3 & -q_3 \frac{v_3}{w_3} & 0 & 1 & -\frac{v_3}{w_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \\ {}^o x_o \\ {}^o y_o \\ {}^o z_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - p_1 l_x + p_1 l_z \frac{u_1}{w_1} \\ a_2 - p_2 l_x + p_2 l_z \frac{u_2}{w_2} \\ a_3 - p_3 l_x + p_3 l_z \frac{u_3}{w_3} \\ b_1 - p_1 l_y + p_1 l_z \frac{v_1}{w_1} \\ b_2 - p_2 l_y + p_2 l_z \frac{v_2}{w_2} \\ b_3 - p_3 l_y + p_3 l_z \frac{v_3}{w_3} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$m_x, m_y, m_z, x_o, y_o, z_o$ 可以看作由变量 l_x, l_y, l_z 线性变换得到，其形式为：

$$A_j l_x + B_j l_y + C_j l_z + D_j \quad (31)$$

将 $m_x, m_y, m_z, x_o, y_o, z_o$ ，代入式 (25—26)，可得到：

$$k_{11} l_x^2 + k_{12} l_y^2 + k_{13} l_z^2 + k_{14} l_x l_y + k_{15} l_y l_z + k_{16} l_x l_z + k_{17} l_x + k_{18} l_y + k_{19} l_z + k_{10} = 0 \quad (32)$$

$$k_{21} l_x^2 + k_{22} l_y^2 + k_{23} l_z^2 + k_{24} l_x l_y + k_{25} l_y l_z + k_{26} l_x l_z + k_{27} l_x + k_{28} l_y + k_{29} l_z + k_{20} = 0 \quad (33)$$

联立式 (15) 和式 (32)，式 (32) 和式 (33)，得到 2 个关于 l_x, l_y, l_z 的一般二元二次方程组。先将式 (15)，式 (32) 化为式 (34) 的形式，即：

$$(a_i l_x + b_i) l_x + c_i = 0 \quad (34)$$

得到：

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 - 1 = 0, a_1 = 1, b_1 = 0,$$

$$c_1 = l_y^2 + l_z^2 - 1 \quad a_2 = k_{11}, b_2 = k_{14} l_y + k_{16} l_z + k_{17},$$

$$c_2 = k_{12} l_y^2 + k_{13} l_z^2 + k_{15} l_y l_z + k_{18} l_y + k_{19} l_z + k_{10} \quad (35)$$

$$(k_{11} l_x + k_{14} l_y + k_{16} l_z + k_{17}) l_x + k_{12} l_y^2 +$$

$$k_{13} l_z^2 + k_{15} l_y l_z + k_{18} l_y + k_{19} l_z + k_{10} = 0$$

消去 l_x ，得到：

$$(a_i c_2 - a_2 c_1) l_x + (b_i c_2 - b_2 c_1) = 0 \quad (36)$$

接下来，将方程组中式 (15)，式 (32) 写成式 (37) 的形式：

$$a_i l_x^2 + (b_i l_x + c_i) = 0 \quad (37)$$

得到：

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 - 1 = 0$$

$$a_3 = 1, b_3 = 0, c_3 = l_y^2 + l_z^2 - 1$$

$$k_{11} l_x^2 + (l_x (k_{14} l_y + k_{16} l_z + k_{17}) + k_{12} l_y^2 +$$

$$k_{13} l_z^2 + k_{15} l_y l_z + k_{18} l_y + k_{19} l_z + k_{10}) = 0 \quad (38)$$

$$a_4 = k_{11}, b_4 = k_{14} l_y + k_{16} l_z + k_{17},$$

$$c_4 = k_{12} l_y^2 + k_{13} l_z^2 + k_{15} l_y l_z + k_{18} l_y + k_{19} l_z + k_{10}$$

式 (38) 消去 l_x^2 得到 :

$$(a_3b_4 - a_4b_3)l_x + (a_3c_4 - a_4c_3) = 0 \tag{39}$$

联立式 (36), 式 (39), 可消掉 l_x 得到关于 l_y, l_z 的方程 :

$$(a_3b_4 - a_4b_3)(b_1c_2 - b_2c_1) - (a_1c_2 - a_2c_1)(a_3c_4 - a_4c_3) = 0 \tag{40}$$

同理, 可联立方程组中式 (32—33) 得到关于 l_y, l_z 的方程, 先将式 (32—33) 化为式 (41) 的形式, 即 :

$$(a_i l_x + b_i) l_x + c_i = 0 \tag{41}$$

得到 :

$$(k_{21}l_x + k_{24}l_y + k_{26}l_z + k_{27})l_x + k_{22}l_y^2 + k_{23}l_z^2 + k_{25}l_y l_z + k_{28}l_y + k_{29}l_z + k_{20} = 0$$

$$a_5 = k_{21}, b_5 = k_{24}l_y + k_{26}l_z + k_{27}, c_5 = k_{22}l_y^2 + k_{23}l_z^2 + k_{25}l_y l_z + k_{28}l_y + k_{29}l_z + k_{20} \tag{42}$$

$$(k_{11}l_x + k_{14}l_y + k_{16}l_z + k_{17})l_x + k_{12}l_y^2 + k_{13}l_z^2 + k_{15}l_y l_z + k_{18}l_y + k_{19}l_z + k_{10} = 0$$

$$a_6 = k_{11}, b_6 = k_{14}l_y + k_{16}l_z + k_{17}$$

$$c_6 = k_{12}l_y^2 + k_{13}l_z^2 + k_{15}l_y l_z + k_{18}l_y + k_{19}l_z + k_{10}$$

消去 l_x , 得到 :

$$(a_5c_6 - a_6c_5)l_x + (b_5c_6 - b_6c_5) = 0 \tag{43}$$

将方程组中式 (32), 式 (33) 写成式 (34) 的形式 :

$$a_i l_x^2 + (b_i l_x + c_i) = 0 \tag{44}$$

$$k_{21}l_x^2 + (l_x(k_{24}l_y + k_{26}l_z + k_{27}) + k_{22}l_y^2 + k_{23}l_z^2 + k_{25}l_y l_z + k_{28}l_y + k_{29}l_z + k_{20}) = 0$$

$$a_7 = k_{21}, b_7 = k_{24}l_y + k_{26}l_z + k_{27},$$

$$c_7 = k_{22}l_y^2 + k_{23}l_z^2 + k_{25}l_y l_z + k_{28}l_y + k_{29}l_z + k_{20} \tag{45}$$

$$k_{11}l_x^2 + (l_x(k_{14}l_y + k_{16}l_z + k_{17}) + k_{12}l_y^2 + k_{13}l_z^2 + k_{15}l_y l_z + k_{18}l_y + k_{19}l_z + k_{10}) = 0$$

$$a_8 = k_{11}, b_8 = k_{14}l_y + k_{16}l_z + k_{17}$$

$$c_8 = k_{12}l_y^2 + k_{13}l_z^2 + k_{15}l_y l_z + k_{18}l_y + k_{19}l_z + k_{10}$$

式 (45) 消去 l_x^2 得到 :

$$(a_7b_8 - a_8b_7)l_x + (a_7c_8 - a_8c_7) = 0 \tag{46}$$

联立式 (43—44), 消去 l_x 得到关于 l_y, l_z 的方程 :

$$(a_5c_6 - a_6c_5)(a_7c_8 - a_8c_7) - (a_7b_8 - a_8b_7)(b_5c_6 - b_6c_5) = 0 \tag{47}$$

式 (40), 式 (47) 2 个方程都是关于 l_y, l_z 的不高于 4 次的方程。可以将其写成式 (48) 的形式。

$$n_{11}l_y^4 + l_y^3(n_{12}l_z + n_{13}) + l_y^2(n_{14}l_z^2 + n_{15}l_z + n_{16}) + l_y(n_{17}l_z^3 + n_{18}l_z^2 + n_{19}l_z + n_{20}) + (n_{21}l_z^4 + n_{22}) = 0$$

$$n_{31}l_y^4 + l_y^3(n_{32}l_z + n_{33}) + l_y^2(n_{34}l_z^2 + n_{35}l_z + n_{36}) + l_y(n_{37}l_z^3 + n_{38}l_z^2 + n_{39}l_z + n_{40}) + (n_{41}l_z^4 + n_{42}) = 0 \tag{48}$$

将式(48)利用结式消元法得到关于 l_z 的行列式, 令行列式值为 0, 可的得到 l_z 的解。使用 Matlab 展开式 (48) 对应的结式的行列式, 发现该行列式是关于 l_z 的 16 次方程, 令该行列式值为零, 可最多解得 16 个解。

3.2.2 运动学逆解。

一般来讲, 并联机构的运动学逆解相对于正解的求解要简单。已知动平台的 6 个位置、姿态参数。根据动平台的尺寸, 可联立式 (7), 式 (13), 式 (14) 得到支链 i 的输入转角, 由于一般情况下, 不使用移动副做被动运动副, 因而也可选择使用移动副作为驱动副。根据支链 i 的输入转角和公式 (14), 也可以求出移动驱动副变量 L_i 的长度, 从而得到该机构的逆解。

4 结 语

文中使用球面 4R 机构代替 3RPS 机构中的定轴转动副 R, 得到了一种新型的 3R_sPS 机构, 该机构的特征为 R_s 副的转动轴线是在空间变化的, 该机构的输出为三维移动伴随三维转动, 具有 3 个自由度, 具有此类运动模式的并联机构在不规则形状的产品分拣筛选时, 具有一定应用前景。

建立了该机构的运动学方程, 使用消元法得到该机构的运动学正解、逆解的求解方法。结果表明该机构的运动学正解最多有 16 个, 由于一般的 3RPS 并联机构正解为 16 个。该新型 3R_sPS 在某瞬时位形下与 3RPS 并联机构是等效的, 因而正解的数目应该与一般 3RPS 并联机构解的数目一致。

参 考 文 献 :

[1] 沈惠平, 张震, 杨廷力, 等. 3T1R 并联机构结构降耦设计与运动学分析[J]. 农业机械学报, 2017, 48(10): 380—389.
SHEN Hui-ping, ZHANG Zhen, YANG Ting-li, et al. Structure Coupling-reducing Design and Kinematics Analysis of 3T1R Parallel Mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, 2017, 48(10): 380—389.

[2] 曹文熬, 丁华锋, 陈子明, 等. 两层两环空间耦合链机构自由度分析原理[J]. 机械工程学报, 2016, 52(17): 116—126.
CAO Wen-ao, DING Hua-feng, CHEN Zi-ming, et al. Principle of Mobility Analysis of Two-level and Two-loop Spatial Mechanisms with Coupling Chains[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(17): 116—126.

[3] 刘伟, 刘宏昭. 具有 2R1T 和 3R 运动模式的并联机构综合[J]. 机械工程学报, 2018, 55(3): 53—63.
LIU Wei, LIU Hong-zhao. Type Synthesis of 3-DOF

- Parallel Mechanism with both 2R1T and 3R Motion Mode[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 55(3): 53—63.
- [4] 刘伟, 曹亚斌, 张洪军, 等. 一种新型可重构 5R 机构的运动学分析[J]. *包装工程*, 2018, 39(7): 157—161.
LIU Wei, CAO Ya-bin, ZHANG Hong-jun. Kinematics Analysis of a New Reconfigurable 5R Mechanism[J]. *Packaging Engineering*, 2018, 39(7): 157—161.
- [5] 刘伟. 5R 平面机构在不同装配、工作模式下的工作空间[J]. *包装工程*, 2017, 38(5): 58—62.
LIU Wei. 5R Plane Mechanism Work Space in Different Assembly Modes and Work[J]. *Packaging Engineering*, 2017, 38(5): 58—62.
- [6] 李秦川, 陈志, 陈巧红, 等. [PP]S 类并联机构无伴随运动的结构条件[J]. *机械工程学报*, 2010, 46(15): 31—35.
LI Qin-chuan, CHEN Zhi, CHEN Qiao-hong, et al. Structural Condition for [PP]S Parallel Mechanism without Parasitic Motion[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2010, 46(15): 31—35.
- [7] NURAHMI L, SCHADLBAUER J, CARO S, et al. Kinematic Analysis of the 3-RPS Cube Parallel Manipulator[J]. *Journal of Mechanisms & Robotics*, 2015, 7(1): 1—11.
- [8] ZHANG D, SHI Q. Novel Design and Analysis of a Reconfigurable Parallel Manipulator Using Variable Geometry Approach[M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2011: 447—457.
- [9] HUANG Z, CHEN Z, LIU J, et al. A 3DOF Rotational Parallel Manipulator Without Intersecting Axes[J]. *Journal of Mechanisms & Robotics*, 2011, 3(2): 441—459.
- [10] DUAN Z, YU J, QU Y, et al. Type Synthesis and Axodes Analysis of a Class of Special 2R1T Parallel Mechanisms[C]// *Iftomm World Congress*, 2015.
- [11] ABHILASH N, LATIFAH N, PHILIPPE W, et al. Comparison of 3-RPS and 3-SPR Parallel Manipulators based on their Maximum Inscribed Singularity-free Circle[J]. *New Trends in Mechanism and Machine Science Theory and Industrial Applications*, 2017, 43: 121—130.
- [12] GALLARDO-Alvarado J, AGUILAR-Nájera C R, CASIQUE-Rosas L, et al. Kinematics and Dynamics of 2(3-RPS) Manipulators by Means of Screw Theory and the Principle of Virtual Work[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2008, 43(10): 1281—1294.
- [13] GAN D, DIAS J, SENEVIRATNE L. Unified Kinematics and Optimal Design of a 3rRPS Metamorphic Parallel Mechanism with a Reconfigurable Revolute Joint[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2016, 96(2): 239—254.
- [14] FANG Y F, TSAI L W. Structure Synthesis of a Class of 4-DoF and 5-DoF Parallel Manipulators with Identical Limb Structures[J]. *Robot Res*, 2002, 21(9): 799—810.
- [15] YANG S, SUN T, HUANG T. Type Synthesis of Parallel Mechanisms Having 3T1R Motion with Variable Rotational Axis[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2017, 109: 220—230.