

基于能量分析的拎手绳打结研究

朱阳^{1,2}

(1.台州广播电视大学 高职院校, 浙江 台州 318000;

2.浙江工业大学 特种装备制造与先进加工技术教育部/浙江省重点实验室, 杭州 310023)

摘要: **目的** 为了设计拎手绳自动打结机而分析能量与拎手绳打结状态的关系。**方法** 分别以悬垂约束时, 缠绕1圈后和成结时的拎手绳为分析对象, 利用悬链线理论建立拎手绳的二维数学模型; 通过弧长方程、变分法里的 Euler-Lagrange 方程等, 分析拎手绳在悬链线状态下的势能; 通过平面曲线的 Frenet 方程、弯曲能量方程及扭转能量方程等, 对用于打结的绳段弯曲能量和扭转能量进行分析, 并进行打结试验验证。**结果** 拎手绳在悬链线状态下势能最小; 拎手绳在缠绕过程中, 弯曲的形状越接近规则圆、拎手绳自身的扭转数越少, 绳子的能量就越小。**结论** 打结过程中拎手绳的状态选择决定了绳子能量的大小, 能量越小绳子就越趋于稳定, 打结成功率越高。

关键词: 悬链线理论; 拎手绳建模; 重力势能; 弯曲能量; 扭转能量

中图分类号: TH113.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2020)11-0233-06

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2020.11.034

Knotting of Hand Rope Based on Energy Analysis

ZHU Yang^{1,2}

(1.Higher Vocational College, Taizhou Radio and Television University, Taizhou 318000, China; 2.Key Laboratory of Special Purpose Equipment and Advanced Manufacturing Technology, Ministry of Education & Zhejiang Province, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

ABSTRACT: The work aims to analyze the relationship between the energy and the knotting state of the hand rope, in order to design an automatic hand rope knotting machine. The catenary theory was used to propose a two-dimensional mathematical model of hand rope based on the analysis of hand rope in the state of suspension, one turn winding and knotting. The arc length equation and the Euler-Lagrange equation of the variational method, etc. were used to analyze the potential energy of the hand rope in the catenary state. The bending energy and torsional energy of the rope segment used for knotting were analyzed by the Frenet equation of the plane curve, the bending energy equation and the torsional energy equation. A knotting test was carried out for the verification. The hand rope had the lowest potential energy in the state of the catenary. In the winding process, the closer the curved shape was to the regular circle, the less the twisting number of the hand rope itself, the smaller the energy of the rope. The state selection of the hand rope in the knotting process determines the energy of the rope. The smaller the energy, the more stable the rope will be, and the higher the knotting success rate.

KEY WORDS: catenary theory; hand rope modeling; gravitational potential energy; bending energy; torsional energy

随着社会的发展,各行业中手工打结的工作暴露出了一系列的缺陷,如工作强度大、工作效率低下等,因此,一些机械化的打结装置应运而生^[1],如织布结打结器、丝线打结器等。在包装领域,如:用于购物的纸袋拎手绳、牧草捆扎、纸币捆扎等,这些绳子的打结还是靠手工操作。根据目前我国第三产业发展的进度,手工操作行业的人力资源日趋紧缺,企业人力成本不断攀升,机械化打结大规模应用于拎手绳将是大势所趋。打结装置的研究中,高成结率是重点考虑的参数之一,而研究高成结率必然要考虑能量因素。

目前的打结器研究模型有些是基于海带悬链线的数学模型^[2],有些是基于缝合线的力学模型^[3],也有的利用了弹簧质点模型进行研究^[4],然而都缺少对所研究对象进行能量方面的分析。

1 拎手绳数学模型

目前市场上的拎手绳,其打结工作基本上是由从业者手工操作,打结方法见图1。结合现有的这种打结方式,对能量进行分析时,先建立纸袋拎手绳的数学模型。



图1 拎手绳打结方法

Fig.1 Knotting method of hand rope

在 xy 坐标上获得拎手绳的投影,并用函数 $f(x)$ 表示其曲线形状。任取绳子的微段 $f(x)$,其受力情况见图2。其中 T_1, T_2 分别为左右两端拉力, ρ 为绳子的线密度, $\rho g \Delta l$ 为重力。

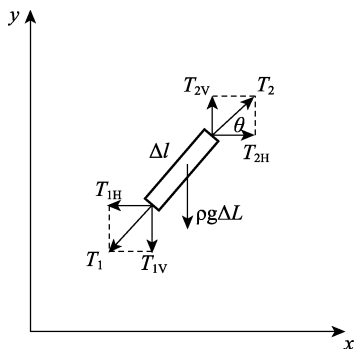


图2 微段绳子受力情况

Fig.2 Stress of micro-segment rope

由物体受力平衡条件可得:

$$\begin{cases} \text{水平方向: } T_{2H} - T_{1H} = 0 \\ \text{竖直方向: } T_{2V} - T_{1V} - \rho g \Delta l = 0 \end{cases} \quad (1)$$

由图2可知,微段绳子所受张力的水平分力总是相等的^[5],记为 F ,而在竖直方向上的分力^[6]则是随着横坐标 x 的变化而变化,记为函数 $T(x)$,因此,由

式(1)可得:

$$T(x + \Delta x) = T(x) + \rho g \Delta l \quad (2)$$

将 $\Delta L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 代入式(2),并使等式两边同除以 Δx ,则得到:

$$\frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} = \frac{\rho g \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} \quad (3)$$

当 Δx 趋于 0 时,取极限得:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho g \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} \quad (4)$$

由一阶导数的几何意义可知:

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (5)$$

由图2可得:

$$\tan \theta = \frac{T_{2V}}{T_{2H}} = \frac{T(x)}{F} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (6)$$

联立式(4—6)得:

$$T'(x) = \rho g \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \quad (7)$$

由 $T(x) = F \times f'(x)$,可推出:

$$T'(x) = F \times f''(x) \quad (8)$$

联立式(7)和式(8)可得:

$$F \times f''(x) = \rho g \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \quad (9)$$

根据微分知识^[7]可知方程(9)属于 $y'' = f(y, y')$ 型。

$$\text{设 } a = \frac{F}{\rho g}, \text{ 解得: } y = f(x) = a \times \cosh\left(\frac{x}{a} + c_1\right) + c_2 \quad (10)$$

式中: a 为悬链系数; C_1 和 C_2 为任意常量。式(10)即为拎手绳数学模型。

2 拎手绳的能量

在纸袋拎手绳进行机械化打结时,对打结有极大影响的就是绳圈所处状态能量的高低。如果绳圈所处状态能量较高,则绳子本身有趋于低能状态的变化,导致绳圈由于产生一定变形而出现不稳定,降低了成结率。

打结中拎手绳的能量包括悬垂状态下的重力势能、绳子弯曲时的能量 E_b 以及扭转时的能量 E_t ^[8],当然也存在绳子的弹性势能,但由于绳子在待打结之前,基本不处于张紧状态,弹性变形极小,因此其势能忽略不计。

2.1 拎手绳的重力势能

在不考虑弹性势能的影响下,不妨定量分析拎手绳从悬垂状态至绕弯成 170° 的某一状态,即相当于在这一状态下两端固定(图3),就可以找到可以使绳子的重力势能达到最小的那个位置。

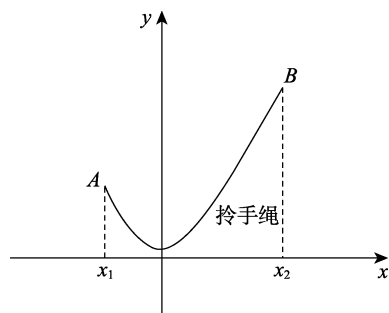


图 3 绳子缠绕
Fig.3 Rope winding

图 3 中, $A(x_1, y_1)$ 为定点之一, 同时也是圆的四等分点; $B(x_2, y_2)$ 为绳子弯曲时的另一定点, 经过 A, B 的绳子长 L , 方程为 $y=f(x)$, 重心位置是 (x_0, y_0) , 根据弧长公式得到:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (11)$$

由重心公式可得:

$$y_0 = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx}{l} \quad (12)$$

由于重力势能大小仅跟重心的 y_0 数值有关, 则可以设泛函为:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (13)$$

式中: $F(x, y, y') = y \sqrt{1 + (y')^2}$ 。根据变分法^[9]相关内容可知, 若曲线 $y=f(x)$ 使 $J(y)$ 取得最小值, 则曲线 $y=f(x)$ 应满足 Euler-Lagrange 式子见式 (14—15)。

$$F_y(x, y, y') - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0 \quad (14)$$

$$\begin{cases} F_y(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2} \\ F_{y'}(x, y, y') = y \cdot y' \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \\ \frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{(y')^2 + y \cdot y''}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \frac{y \cdot (y')^2 \cdot y''}{(\sqrt{1 + (y')^2})^3} \end{cases} \quad (15)$$

将式 (15) 的 3 个方程代入式 (14) 得:

$$1 + (y')^2 - y \cdot y'' = 0 \quad (16)$$

解微分方程 (16) 得:

$$y = \cosh\left(\frac{x}{a} + c\right) \quad (17)$$

式中: a, c 为常量。

以上计算中从使用 Euler-Lagrange 方程开始, 所有计算过程均为临界状态。最终得出, 过 A, B 定点的曲线, 最低重心位置为悬链状态, 即拎手绳在形成圆圈之前, 如果使绳子处于悬链线状态, 则绳子处于最低能量的最稳定状态^[6]。

2.2 拎手绳的弯曲能量

为了分析拎手绳在弯曲时产生的能量, 不妨把绳子看作二维曲线, 设为 $r=r(s)$, 见图 4, s 为弧长^[10], 则方程可以表示为:

$$r(s) = (x(s), y(s)) \quad (18)$$

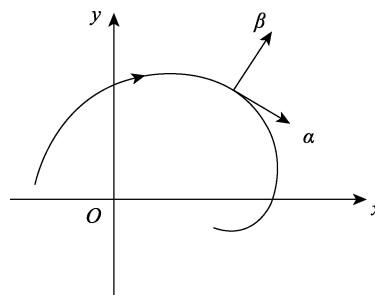


图 4 平面曲线向量分布
Fig.4 Vector distribution of plane curve

由此, 可以计算出其单位切向量:

$$\alpha(s) = r'(s) = (x'(s), y'(s)) \quad (19)$$

$\beta(s)$ 为唯一与 $\alpha(s)$ 垂直正交的单位向量, 即:

$$\beta(s) = (-y'(s), x'(s)) \quad (20)$$

沿 $r=r(s)$ 曲线可以建单位正交标架场 $\{r(s); \alpha(s), \beta(s)\}$ ^[11], 因为 $\alpha(s)$ 为单位向量场, 并且有 $\alpha(s) \perp \alpha'(s)$, 既而可以计算平面曲线 $r=r(s)$ 相对曲率

$$\alpha'(s) = \kappa_r \beta(s) \Rightarrow \kappa_r = \alpha'(s) \cdot \beta(s) \quad (21)$$

根据以上分析与计算过程, 可以得出该平面曲线的 Frenet 式为:

$$\begin{cases} \frac{dr}{ds} = \alpha \\ \frac{d\alpha}{ds} = \kappa_r \beta \\ \frac{d\beta}{ds} = -\kappa_r \alpha \end{cases} \quad (22)$$

用 $\theta(s)$ 表示切向量 $\alpha(s)$ 与 x 轴正向夹角, 且把其看成 $\alpha(s)$ 的方向角, 在弧长 s 微段内取 $\theta(s)$ 的一个连通分支, 则有:

$$\alpha(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \quad (23)$$

联立式 (18) 和式 (20), 可得:

$$\begin{cases} x'(s) = \cos \theta(s) \\ y'(s) = \sin \theta(s) \end{cases} \quad (24)$$

对式 (24) 再次求导, 可得:

$$\begin{cases} x''(s) = -\sin \theta(s) \cdot \theta'(s) \\ y''(s) = \cos \theta(s) \cdot \theta'(s) \end{cases} \quad (25)$$

其中 $\alpha'(s) = (x''(s), y''(s))$, 则:

$$\alpha'(s) = (x''(s), y''(s)) = (-\sin \theta'(s) \cdot \theta'(s), \cos \theta'(s) \cdot \theta'(s)) \quad (26)$$

式 (26) 两边点乘 $\beta(s)$, 联合式 (20—25), 即

可得到：

$$\begin{aligned} \alpha'(s) \cdot \beta(s) &= (-\sin \theta'(s) \cdot \theta'(s), \cos \theta'(s) \cdot \theta'(s)) \cdot \beta(s) = \\ &= (\sin^2 \theta'(s) + \cos^2 \theta'(s)) \cdot \theta'(s) = \theta'(s) = \kappa_r \end{aligned} \quad (27)$$

拎手绳平面曲线弯曲时,会出现方向角 $\theta(s)$,设最初位置时 $\theta(s)_0=0$,同时考虑到曲线弯曲时会有多个方向角而导致绳子变形的形状有多种,可以将曲线等分成多个单位长度,进而对这些单位长度的绳段所产生的方向角进行分析,见图5。

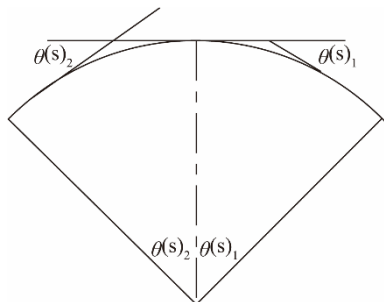


图5 拎手绳弯曲模型

Fig.5 Bending model of hand rope

由平面曲线单位弯曲能量计算方法^[12]得到曲线单位弯曲能量方程：

$$\tilde{E}_b = \frac{1}{2} K_b [c(s)]^2 \quad (28)$$

式中： K_b 为弯曲刚度； $c(s)$ 为曲率，即 κ_r 。

根据式(27—28)，可以计算：

$$\tilde{E}_b = \frac{1}{2} K_b [c(s)]^2 = \frac{1}{2} K_b \cdot \kappa_r^2 = \frac{1}{2} K_b \cdot (\theta'(s)_1)^2 + \quad (29)$$

$$\frac{1}{2} K_b \cdot (\theta'(s)_2)^2 \geq K_b \theta'(s)_1 \theta'(s)_2$$

当且仅当 $\theta'(s)_1 = \theta'(s)_2$ 时, $\tilde{E}_{b(\min)} = K_b \theta'(s)_1 \theta'(s)_2$ 。

对 $\theta'(s)_1 = \theta'(s)_2$ 两边积分, 可得：

$$\int_{s_c}^{s_B} \theta'(s)_1 ds = \int_{s_B}^{s_A} \theta'(s)_2 ds \Rightarrow \quad (30)$$

$$\theta(s)_1 = \theta(s)_2 + \theta(s)_0$$

将初始位置设定的 $\theta(s)_0 = 0$ 代入式(30), 可见当 $\theta(s)_1 = \theta(s)_2$ 时, 绳子的单位弯曲能量处于最小状态, 根据 Mark Moll 等^[13]的能量最小原则, 这个时候的绳子倾向于稳定的规则圆形。

2.3 拎手绳的扭转能量

可以用一个简单的实验来了解拎手绳在扭转时产生的能量。把一根绳子拉直(不伸长), 见图6a, 则该状态下 $L_K = T_w = 0$ (式中 L_K 为环绕数, T_w 扭转数)^[14], 此时绳子不产生任何能量。再把该绳子扭转数圈后拉直, 见图6b, 则捏住绳子的手指头能够感觉到有一定的扭转力矩, 如果扭转的圈数继续增加, 手指感觉到的力矩也会增加, 此时如果不用力捏紧, 绳子将会直接滑落, 这种状态下有 $L_K = T_w > 1$ 。在捏

紧的状态下逐渐减小拉力, 则绳子会逐渐纠缠成图6c的形状, 手指感觉到绳子的扭转力矩也在逐渐减小, 说明从图6b—c, 绳子扭转的能量在逐渐减小。

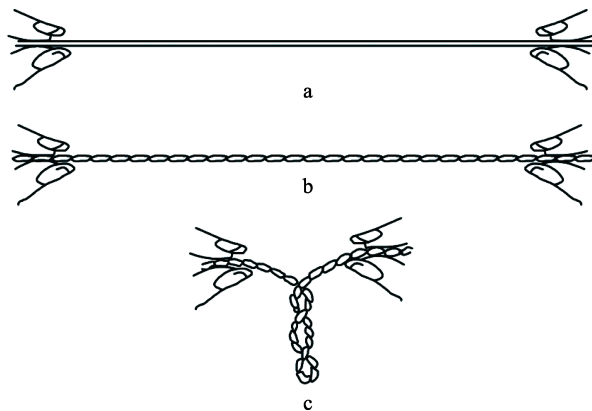


图6 绳圈扭转实例

Fig.6 Example of rope loop torsion

根据上述可以发现, 影响拎手绳扭转能量大小的主要原因是绳子扭转的圈数的多少。根据扭转能量方程可以得到^[15]：

$$E_t = \frac{2\pi^2 K_t}{L^2} (T_w)^2 \quad (31)$$

式中： K_t 为扭转刚度； L 为绳子长度。

扭转刚度 K_t 与绳子长度 L 为常量, 均只跟材料本身有关, 所以根据方程(31)可以看出, 拎手绳的扭转能量 E_t 与绳子扭转数 T_w 的平方成正比, 如果需要拎手绳能量处于较低状态, 则需要尽可能减少让拎手绳的扭转数 T_w 。

根据以上对重力势能、弯曲能量及扭转能量的分析, 为了使拎手绳便于打结, 需要想办法使绳圈处于低能量的稳定状态, 而绕轴旋转打结法可以让绳子在打结过程中形成圆形, 从而在任一相等长度弧段上的方向角均相等且满足打结过程中的低能量要求。过程见图7, 拎手绳绕轴旋转即可得到基本呈圆形的绳圈, 由式(30)可以证明此时弯曲能量 E_b 接近最小。

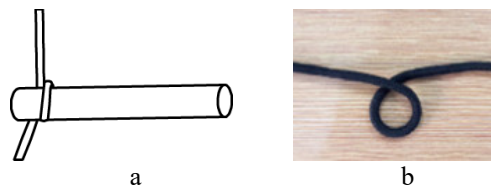


图7 绳子绕轴的效果

Fig.7 Rendering of rope around axis

由于夹绳工具与绳子一起转动, 此状态下绞拧数 $W \approx 1$, 因为作为拓扑不变量的环绕数 L_K 保持为0, 所以扭转数 $T_w \approx -1$, 拎手绳绕轴旋转过程中紧贴圆轴, 使得绳圈中不存在足够的条件产生扭转, 因此扭转能量 $E_t \approx 0$, 满足绳圈保持稳定的要求。当然, 在绳圈外确实有一定扭转数, 但并不影响拎手绳的成结。

3 打结试验

为验证成结过程中不同阶段能量及绳的状态选择对打结的影响,在自动打结装置平台上搭建了实验样机,样机主要由绕绳、传动、成结三大机构组成,原动机选择了 57H2P9850A4 步进电机同时外接调速器作为控制部分。整个自动打结试验机见图 8。

从图 9a—b,绳子在绕绳机构上从初始位置的 0° 转动至 170° ,期间影响较大的能量主要是绳子的重力势能,根据上述分析,此时绳子基本处于悬链线状态,达到势能最小。从图 9b—c,即绕绳机构从 170° 转动至 400° ,期间影响较大的能量主要是弯曲能量,此时绳子的打结部分基本处于规则圆形状态,达到弯曲能

量最小。从图 9c—d 的成结过程中,影响较大的能量主要是绳子的扭转能量,由于扭转数少,所以此时绳子的扭转能量最低。

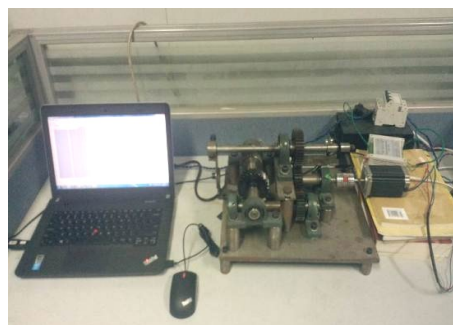
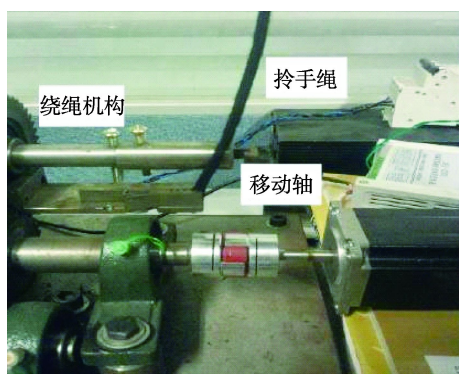
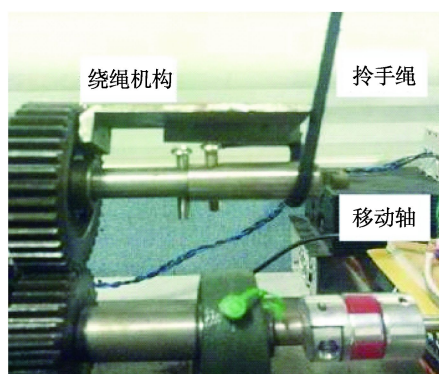


图 8 自动打结试验机

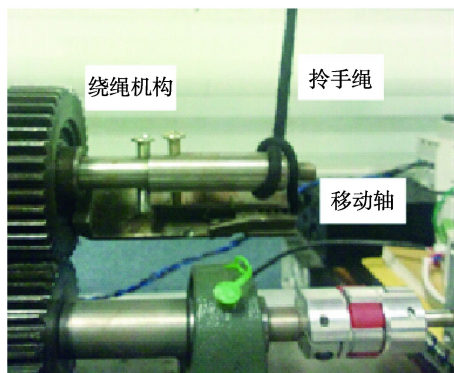
Fig.8 Test device for automatic knotting



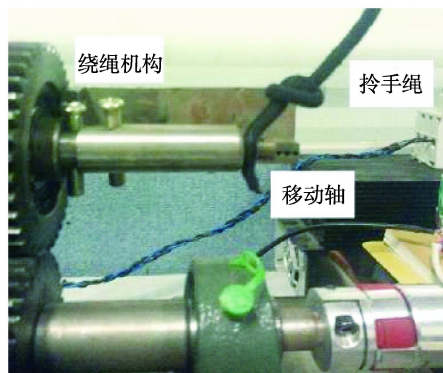
a 绕绳及成结两机构处于初始位置



b 绕绳机构转动至 170° 位置,成结机构初始位置不变



c 绕绳机构转动至 400° ,成结机构直线运动 20 mm



d 绕绳机构转动至 510° ,成结机构直线运动 40 mm

图 9 绳子打结过程

Fig.9 Process of rope knotting

由此可见,通过对拎手绳打结过程中 3 个主要阶段的能量分析,能指导实际打结过程中绳的状态选择,从而提高打结成功率。

4 结语

为了提高拎手绳机械化打结的成结率,需要对其进行合理的能量分析。研究所做工作总结如下所述。

1) 利用悬链线理论,首先对微段进行受力分析,

由静力平衡条件、三角函数、一阶导数的定义及微分方程的解法,在两端点已知的状态,构建了绳子的二维数学模型。

2) 通过弧长、重心方程与 Euler-Lagrange 方程,得到绳子在处于悬链线状态时,重力势能最小,绳子最稳定;使用了 Frenet 方程、弯曲能量方程及扭转能量方程,证得拎手绳在缠绕过程中,曲线形状越接近圆形、扭转数越少,弯曲能量、扭转能量就越小,打结过程就越稳定。

3) 在自动打结试验台上进行了试验验证, 得出在拎手绳的成结过程, 不同阶段中重力势能、弯曲能量与扭转能量所起的主要作用, 实现快速成功打结。

以上结论对多样复杂状态时的打结尚待进一步研究。

参考文献:

- [1] 徐广明, 陶永红. 打结器的应用与发展简论[J]. 中国高新技术企业, 2007(12): 97.
XU Guang-ming, TAO Yong-hong. Brief Comment on Application and Development of Knot Tying Device[J]. China Hi Tech Enterprise, 2007(12): 97.
- [2] 李哲, 王宇锐, 汤剑, 等. 基于悬链线理论的海带打结原理研究[J]. 工程设计学报, 2011, 18(4): 260—264.
LI Zhe, WANG Yu-rui, TANG Jian, et al. Research of Kelp-knot Principle Based on Catenary Theory[J]. Journal of Engineering Design, 2011, 18(4): 260—264.
- [3] 岳龙旺, 王树新, 曾妍文. 基于多体理论的虚拟血管缝合分析[J]. 天津大学学报, 2006, 39(1): 89—95.
YUE Long-wang, WANG Shu-xin, ZENG Yan-wen, et al. Analysis of Virtual Vessel Suture Based on Multi-body Theory[J]. Journal of Tianjin University, 2006, 39(1): 89—95.
- [4] PHILLIPS J, LADD A, LYDIA E. Kavraki. Simulated Knot Tying[C]// Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation. Washington DC, USA, 2002: 841—846.
- [5] 刘帅. 轴向移动绳横向振动能量的分析控制及实验研究[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2016: 24—27.
LIU Shuai. Control Analysis and Experimental Research of the Vibration Energy of Axially Moving String System[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2016: 24—27.
- [6] 张永涛. 基于悬链线理论的线缆建模和仿真研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2013: 35—36.
ZHANG Yong-tao. Modeling and Simulation of Cable Based on the Theory of Catenary[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics And Astronautics, 2013: 35—36.
- [7] 同济大学数学系. 高等数学上册(第 6 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007: 320—321.
Department of Mathematics of Tongji University. Higher Mathematics(I)(Sixth Edition)[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007: 320—321.
- [8] 袁梦, 范菊, 朱仁传, 等. 基于悬链线理论的系泊系统势能[J]. 上海交通大学学报, 2011, 45(4): 597—603.
YUAN Meng, FAN Ju, ZHU Ren-chuan, et al. Potential Energy Study of Mooring System Based on Catenary Method[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2011, 45(4): 597—603.
- [9] 吴迪. 变分法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987: 12—47.
WU Di. Variational Methods[M]. Beijing: Higher Education Press, 1987: 12—47.
- [10] 陈维桓. 微分几何初步[M]. 北京: 北京大学出版社, 1990: 10—50.
CHEN Wei-huan. First Step to Differential Geometry[M]. Beijing: Peking University Press, 1990: 10—50.
- [11] 陈维桓, 李兴校. 黎曼几何引论上册[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002: 219—250.
CHEN Wei-huan, LI Xing-xiao. An Introduction to Riemannian Geometry(I)[M]. Beijing: Peking University Press, 2002: 219—250.
- [12] RICCA R L. The Energy Spectrum of a Twisted Flexible String Under Elastic Relaxation[J]. Iop Science, 1995(6): 2335—2352.
- [13] MOLL M, KAVRAKI L E. Path Planning for Variable Resolution Minimal Energy Curves of Constant Length[J]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Spain, 2005(3): 2130—2135.
- [14] 姜伯驹. 绳圈的数学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2011: 101—103.
JIANG Bo-ju. Mathematics of String Figures[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2011: 101—103.
- [15] AKOS D, JACQUES D, MILLETT K, et al. Scaling Behavior of Random Knots[J]. PANS, 2002, 100(10): 5611—5615.