含闭环球铰的三自由度并联机构工作空间分析

李虹,王新宇,胡洋,马春生,李瑞琴

(中北大学 机械工程学院,太原 030051)

摘要:目的 为并联机床找到最优的工作空间范围,提出一种含闭环球较的三自由度并联机构。方法 根 据并联机构的运动学反解,首先求解速度雅克比矩阵;随后在速度雅克比矩阵的基础上,分析并联机构 的3种奇异位置,给出奇异位置的数值解,并仿真并联机构在剔除奇异位置情况下的理论可达工作空间; 最后,分析并联机构的灵巧度,找到并联机构在理论可达工作空间下灵巧度为0的位置,确定并联机构 动平台实际可达工作空间。结果 在剔除奇异位置和灵巧度为0的位置之后,并联机构实际可达空间的 x 轴位移从[-10 mm, 5 mm]减小到[-9 mm, -5.4 mm], z 轴位移从[-790 mm, -650 mm]减小到[-790 mm, -677 mm],并联机构的转角范围由理论范围的[-30°, 80°]转变为[32.544°, 64.114]。结论 通过分析灵巧 度的方式得到并联机构的实际可达工作空间,证明灵巧度对并联机构的工作空间有着较大的影响,从而 为该并联机构用于并联机床设计提供一定的理论依据。

关键词:并联机构;奇异位置;理论可达工作空间;灵巧度;实际可达工作空间 中图分类号:TH112 文献标识码:A 文章编号:1001-3563(2020)21-0202-06 DOI:10.19554/j.cnki.1001-3563.2020.21.029

Workspace Analysis of Three-degree-of-freedom Parallel Mechanism with Closed-loop Ball Joint

LI Hong, WANG Xin-yu, HU Yang, MA Chun-sheng, LI Rui-qin (School of Mechanical Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China)

ABSTRACT: The work aims to propose a three-degree-of-freedom parallel mechanism with closed global hinges to find the optimal workspace of parallel mechanism. Based on the reverse solution of the parallel mechanism, the velocity Jacobian matrix was first solved. Then based on the velocity Jacobian matrix, three singular positions of the parallel mechanism were analyzed, and numerical solutions of the singular positions were given. The theoretical reachable workspace of the parallel mechanism after elimination of singularities was simulated. Finally, the dexterity of the parallel mechanism was analyzed to find the position where the dexterity of the parallel mechanism was 0 under the theoretical reachable workspace, and the actual reachable workspace of the moving platform of the parallel mechanism was determined. After singular positions and 0 dexterity positions were eliminated, the *x*-axis displacement of the actual reachable space of the parallel mechanism was reduced from [-10 mm, 5 mm] to [-9 mm, -5.4 mm], and the *z*-axis displacement was reduced from $[-30^{\circ}, 80^{\circ}]$ of the theoretical range to $[32.544^{\circ}, 64.114^{\circ}]$. The actual reachable workspace of the parallel mechanism is obtained by analyzing the dexterity. It proves that the dexterity has a great influence on the workspace of the parallel mechanism, and thus it provides a certain theoretical basis for applying the parallel mechanism in the design of parallel

作者简介:李虹(1966-),女,硕士,中北大学副教授,主要研究方向为机构理论与机器人技术。

收稿日期: 2020-01-11

基金项目:山西省自然科学基金(201801D121183)

machine tools.

KEY WORDS: parallel mechanism; singular positions; theoretical reachable workspace; dexterity; actual reachable workspace

通常在并联机构工作空间分析当中,只考虑到剔 除并联机构的奇异位置之后得到的工作空间,然而, 并联机构的灵巧度影响着并联机构的工作空间。当并 联机构的灵巧度为0的时候,机构的执行末端会出现 "卡死"等病态现象,使并联机构不能正常工作。通过 分析并联机构的灵巧度,找出灵巧度为0的位置,在 理论可达工作空间的基础上剔除灵巧度为0的位置, 得出实际可达工作空间。这对并联机构投入实际应用 有着非常重要的意义。在印刷刻版这一方面,雕刻机 需要在胶板或者铜板上雕刻出不同的花纹,所以分析 机构的灵巧度就十分重要。

柴馨雪等^[1]对 2-UPR-RPU 并联机构进行了奇异 性分析,并且用螺旋理论解释了奇异位置的意义。 C. Gossalin 等^[2]最早利用了主动输入与被动输出之 间的关系来对奇异性进行分析,给输入与输出的 Jacobain 矩阵的行列式定义了机构的 3 种奇异位置: 正解奇异、反解奇异和混合奇异。S. Amine 等^[3]采用 Grassmann-Cayley 代数和 Grassmann 几何对 3T2R 均 匀对称且自由度为5的并联机构进行奇异性分析,得 出存在奇异性的数学表达式。陈修龙等^[4]对冗余并联 机构进行了灵巧度分析,并且对其进行优化,提高了 该机构的灵巧度,减少了输出末端速度的失真。何淑 全^[5]对四足移动机器人的球面并联腿机构进行了灵 巧度分析,为移动机器人的步态规划提供了基础。刘 晓娟等^[6]对平面 3-RRP 并联机构进行了工作空间分 析和灵巧度分析,发现该平面机构有各向同性的运动 特性。曾达幸等^[7]以灵巧度为目标,进一步优化了 3-CUR 解耦并联机构的驱动角范围。李启腾等^[8]以灵 巧度作为评价指标,对比了 3-5RUU 并联机构和 Stawart 并联机构的运动性能,结果表明, 3-5RUU并 联机构有更好的灵巧度。陈小岗等^[9]对 6-UPS 并联机 构进行了工作空间分析,给出了不同姿态能力角下的 工作空间。Tang T 等^[10]对五自由度混联机床进行了 结构设计,并进行了工作空间和运动静力学分析。李 虹等[11]对新型单支链含球铰闭环并联机构进行了位 置分析,得出了并联机构的工作空间。孟维健等^[12] 一种装箱作业并联机器人机构的运动性能进行了分 析,确定了并联机构的刚度。Zhang D 等^[13]对冗余三 自由度并联机构进行了刚度分析,最后对并联机构的 运动性能进行了优化。

文中首先在并联机构位置反解的基础上求解出 速度雅克比矩阵,然后根据速度雅克比矩阵求解出并 联机构的奇异位置,剔除奇异位置得出了理论可达工 作空间;接着根据速度雅克比矩阵求解灵巧度,最后 剔除灵巧度为0的位置,得出并联机构的实际可达工作空间。

1 速度雅克比矩阵分析

1.1 并联机构简介

该并联机构的模型见图 1。整个并联机构由定平 台、动平台和 3 条支链组成。支链 1 和支链 2 为 PRU 支链,由一个 P 副(移动副)、一个 R 副(转动副) 和一个 U 副(万向铰)组成。支链 3 为闭环球铰支 链,由 1 个 P 副、4 个 S 副(球副)的闭环球铰和 1 个 R 副组成。在定平台上的坐标系 *O*_A-*x*_A*y*_A*z*_A 为定坐 标系;在动平台上的坐标系 *O*_B-*x*_B*y*_B*z*_B 为动坐标系。

该并联机构有 3 个自由度, 分别沿 y_A和 z_A轴的 移动和绕 y_A轴的转动。相对于其他的三自由度并联 机构,该并联机构属于非对称结构,支链 3 为适应性 中央支链,可以增加并联机构的刚度,还可以增加并 联机构的驱动力。支链 3 为 P-2(SS)的结构,这种闭 环球铰的结构相对于其他的结构,可以给动平台提供 较大的转角。



图 1 并联机构模型 Fig.1 Model of parallel mechanism

1.2 速度雅克比矩阵

该并联机构的位置反解^[14]见式(1)。

$$\begin{cases} d_{1} = z \pm \sqrt{L^{2} - (-r + y + R)^{2}} \\ d_{2} = z \pm \sqrt{L^{2} - (r + y + R)^{2}} \\ d_{3} = z + r \sin \theta \pm \sqrt{L^{2} - (-r \cos \theta + R)^{2} - y^{2}} \\ \end{array}$$
(1)

$$e^{2\pi i t} R t = 0$$

式中: d 为移动副的位移; y, z 分别为动平台在 定坐标系下的 y_A , z_A 方向的位置; L 为并联机构的连 杆长度; R 为定平台外接圆半径; r 为动平台外接圆 半径; θ 为动平台绕 y_A 轴转动的角度。

将式(1)中等号两边同时对时间 *t* 求导,见式(2)。

$$\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{d}}_1\\ \dot{\boldsymbol{d}}_2\\ \dot{\boldsymbol{d}}_3 \end{bmatrix} - \boldsymbol{G}\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}}\\ \boldsymbol{y}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = 0$$
(2)

式中:矩阵T和矩阵G分别见式(3-4)。

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$
(3)
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}$$
(4)

$$\begin{cases} T_{11} = \sqrt{L^{2} - (-r + y + R)^{2}} \\ T_{22} = \sqrt{L^{2} - (r + y + R)^{2}} \\ T_{33} = \sqrt{L^{2} - (-r\cos\theta + R)^{2} - y^{2}} \\ \text{fat (4) $\oplus, \quad G_{ij} \text{ Dat (6)}_{\circ} \end{cases}$ (5)
$$\begin{cases} G_{11} = -r + y + R \\ G_{12} = T_{11} \\ G_{13} = 0 \\ G_{21} = r + y - R \\ G_{22} = T_{22} \\ G_{23} = 0 \\ G_{31} = y \\ G_{32} = T_{33} \\ G_{33} = T_{33}r\cos\theta + r^{2}\sin\theta\cos\theta + Rr\sin\theta \\ \text{But fight } \mathbf{G} \text{ That } \mathbf{F} \text{ That } \mathbf$$$$

式中: $G^{-1}T=J$, J 为速度雅克比矩阵。

2 奇异性与理论可达工作空间

2.1 奇异性

根据矩阵 G 和 T 的欠秩情况,可以将奇异类型 分为反解奇异、正解奇异和混合奇异等 3 种。当雕刻 机的动平台处在奇异位置的时候,就会出现"卡死"或 者"乱动"的情况。

2.1.1 反解奇异

当|**T**|=0且|**G**|≠0时,发生反解奇异,动平台失 去若干个自由度。这种现象可以解释为:当驱动副 上没有力和力矩的时候,动平台可以承受若干个力 或力偶。

当|**T**|=0且|**G**|≠0时,分3种情况:当 T_{11} =0时,即 d_1 =z,也就是支链1的连杆处于水平位置时,见图2a;当 T_{22} =0时,即 d_2 =z,也就是支链2的连杆处于水平位置时,见图2b;当 T_{33} =0且 θ =0时,即 d_3 =z,也就是支链3的闭环球铰的连杆处于水平位置时,见图2c。



图 2 反解奇异 Fig.2 Reverse solution singularity

2.1.2 正解奇异

当|**T**|≠0且|**G**|=0时,发生正解奇异,动平台得 到若干个自由度。这种现象可以解释为当驱动副上没 有力和力矩的时候,动平台不能承受若干个力或力 偶。

当 $|\mathbf{T}| \neq 0$ 且 $|\mathbf{G}| = 0$ 时,只有 1 种情况:当 $\frac{G_{11}}{G_{21}} = \frac{G_{12}}{G_{22}}$ 时,即 y=0 时,此时 $T_{11}=-T_{22}$,也就是当连杆 L_1 和 L_2 处于平行状态时,见图 3a 和图 3b。



2.1.3 混合奇异

当|**T**|=0且|**G**|=0时,发生运动学混合奇异。这 种现象可以解释为:当驱动副上没有力和力矩的时候,并联机构的支链可以承受一个有限的运动;当驱 动副上有力或力矩的时候,动平台不产生运动。

根据反解奇异和正解奇异可知:当 T₃₃=0 且 $G_{11} = G_{12}$ 时,支链3的闭环球铰的连杆处于水平位置 G_{21} G_{22} 时且 y=0。该并联机构的正面和侧面见图 4a—b。



图 4 混合奇异 Fig.4 Mixed singularity

2.2 理论可达工作空间

理论可达空间就是把并联机构的奇异位置剔除 之后,并联机构的输出末端在理论上可以达到的位 置。并联机构的各项参数见表 1^[14]。通过参照表 1 的 参数并用 Matlab 编程仿真^[15],得到了并联机构的理 论可达工作空间,见图 5。



c x, y平面投影

图 5 理论可达工作空间 Fig.5 Theoretical reachable workspace

Tab.1 Various parameters of the parallel mechanism
表 1 并联机构的各项参数

尺寸参数	取值
R	600 mm
r	60 mm
L	850 mm
у	[-160 mm, 160 mm]
Z	[-790 mm, -630 mm]
heta	[-30°, 80°]

灵巧度与实际可达工作空间 3

并联机构的灵巧度 3.1

灵巧度是衡量并联机构输出末端获取位置姿态 能力的一个参数,这个参数由速度雅克比矩阵的条件 数求解出,表达式见式(8)。

$$\omega = \frac{1}{\kappa(J)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(J^{T}J)\lambda_{\max}[(J^{-1})^{T}J^{-1}]}}$$
(8)

式中: ω 为机构的灵巧度; $\kappa(J)$ 为雅克比矩阵 条件数。

通常 $0 \le \omega \le 1$ 。当 $\omega = 0$ 时,并联机构的灵巧度

最差,此时并联机构处于病态位置;当*w*=1时,并联 机构的灵巧度最优。

由于该并联机构可以沿 y_A , z_A 移动和绕 y_A 转动, 所以,通过参照表 1 参数,并用 Matlab 仿真,得出 y, z 和 y, θ 之间灵巧度的关系,见图 6—7。

由图 6 和图 7 可以看出,并联机构的灵巧度与 z 的位移无关,只与 y 和 θ 相关。当 θ 转动超过一定范 围之后,机构的灵巧度就变为了 0。经过计算,在 $\omega \neq 0$ 时, 32.544° $\leq \theta \leq 64.114$ °。





3.2 实际可达工作空间

该并联机构如果投入雕刻机刻版的应用,必须要 分析它的实际可达工作空间。在 3.1 节中的灵巧度分 析之后,在θ的理论值上进一步地缩小了θ的取值范 围。这个取值范围是剔除了机构的奇异位置和灵巧度 为0的位置之后的范围。用计算出的θ取值范围作为 机构的转动角度继续 Matlab 模拟仿真,最终得并联 机构的实际可达工作空间见图 8。



图 7 $y 和 \theta$ 之间灵巧度的关系 Fig.7 Dexterity relationship between y and θ



c x, y平面投影

图 8 实际可达工作空间 Fig.8 Actual reachable workspace

由图 8 可以看出,由于转角 θ 范围的缩小,并联 机构的实际可达工作空间与理论可达工作空间相比, X_A 轴方向的位移由原来的[-10 mm, 5 mm]变成了[-9 mm, -5.4 mm]; Z_A 方向的位移由原来的[-790 mm, -650 mm]变成了[-790 mm, -677 mm]。

4 结语

该并联机构存在3种奇异位置,在工作空间仿真 的时候应当把奇异位置去掉,奇异位置对工作空间大 小的影响较小。

该并联机构的理论转角为-30°≤θ≤80°,经过灵 巧度分析之后,确定了转角的实际范围是 32.544°≤ θ≤64.114°,该范围才是并联机构的实际转角。该并 联机构可以应用于大转角并联机床的设计。

通过奇异性分析和灵巧度分析,确定了理论可达 工作空间和实际可达工作空间,为进一步进行并联机 构的动力学、误差精度研究以及实验样机建立提供了 基础。对并联机构的运用至雕刻机一定的指导意义。

参考文献:

- 柴馨雪,项济南,李秦川. 2-UPR-RPU并联机构奇异 分析[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 150—157.
 CHAI Xin-xue, XIANG Ji-nan, LI Qin-chuan. Singularity Analysis of a 2-UPR-RPU Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 150—157.
- [2] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity Analysis of Closed-loop Kinematic Chains[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 281–290.
- [3] AMINE S, MASOULEH M T, CARO S, et al. Singularity Analysis of 3T2R Parallel Mechanisms Using Grassmann-cayley Algebra and Grassmann Geometry[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 52(1): 326—340.
- [4] 陈修龙,蒋德玉,陈林林,等. 冗余并联机构运动学性 能分析与优化[J]. 农业机械学报, 2016, 47(6): 340—347. CHEN Xiu-long, JIANG De-yu, CHEN Lin-lin, et al. Kinematics Performance Analysis and Optimal Design of Redundant Actuation Parallel Mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6): 340—347.
- [5] 何淑垒.四足移动机器人的球面并联腿机构设计与运动性能研究[D].济南:山东大学,2019:42—43.
 HE Shu-lei. Research on Design and Motion Performance of Spherical Parallel Leg Mechanism for Quadruped Mobile Robot[D]. Jinan: Shandong University, 2019:42—43.
- [6] 刘小娟,李虹,李瑞琴,等. 3-RRP 平面并联机构的 工作空间和灵巧度分析[J]. 东华大学学报(自然科学 版), 2016, 42(4): 523—526.
 LIU Xiao-juan, LI Hong, LI Rui-qin, et al. Workspace

and Dexterity Analysis of 3-RRP Planar Parallel Mechanism[J]. Journal of Donghua University (Natural Science), 2016, 42(4): 523—526.

- [7] 曾达幸,张星,樊明洲,等. 3-CUR解耦并联 3D打印 机结构优化与动力学分析[J].中国机械工程,2017, 28(12):1413—1420.
 ZENG Da-xing, ZHANG Xing, FAN Ming-zhou, et al. Structure Optimization and Dynamics Analysis of 3-CUR Decoupled Parallel 3D Printers[J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(12):1413—1420.
- [8] 李启腾, 戚开诚, 张建军, 等. 新型含子闭环并联机 构的灵巧性研究[J]. 机械设计与研究, 2017, 33(6): 21—24.
 LI Qi-teng, QI Kai-cheng, ZHANG Jian-jun, et al. The Dexterity Research of a Novel Parallel Mechanism with Sub Closed-chains[J]. Machine Design & Research, 2017, 33(6): 21—24.
- [9] 陈小岗,孙宇,刘远伟,等. 6-UPS 并联机床位姿空 间图谱 [J]. 中国机械工程, 2013, 48(10): 57—61. CHEN Xiao-gang, SUN Yu, LIU Yuan-wei, et al. Position and Orientation Workspace Atlas of a 6-UPS Parallel Machine Tool[J]. China Mechanical Engineering, 2013, 48(10): 57—61.
- [10] TANG T, ZHANG J. Conceptual Design and Kinetostatic Analysis of a Modular Parallel Kinematic Machine-based Hybrid Machine Tool for Large Aeronautic Components[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2019, 57(1): 1—16.
- [11] 李虹,李亚丽,李瑞琴,等.新型单支链含球铰闭环 并联机构的位置分析[J].包装工程,2018,39(23): 158—163.
 LI Hong, LI Ya-li, LI Rui-qin, et al. Position of New Single-branch Closed-loop Parallel Mechanism with Ball Joints[J]. Packaging Engineering, 2018, 39(23): 158—163.
- [12] 孟维健,张艳伟,程建豪,等. 一种装箱作业并联机器 人机构的运动性能 [J]. 包装工程, 2017, 38(5): 72—77. MENG Wei-jian, ZHANG Yan-wei, CHENG Jian-hao, et al. The Kinematic Performance of a Parallel Robot Mechanism for Packaging[J]. Packaging Engineering, 2017, 38(5): 72—77.
- [13] ZHANG D, GAO Z, SU X, et al. A Comparison Study of Three Degree-of-freedom Parallel Robotic Machine Tools with/without Actuation Redundancy[J]. International Journal of Computer Integrated Manufacturing, 2012, 25(3): 230–247.
- [14] 胡洋. 一种大转角混联机床性能分析与优化[D]. 太原: 中北大学, 2018: 22—24.
 HU Yang. Performance Analysis and Optimization of a Hybrid Machine Tool with Large Rotation Angle[D]. Taiyuan: North University of China, 2018: 22—24.
- [15] 黄真,赵永生,赵铁石.高等空间机构学[M].北京:高等教育出版社,2014:181—184.
 HUANG Zhen, ZHAO Yong-sheng, ZHAO Tie-shi.
 Advanced Spatial Mechanism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2014:181—184.