可压缩纸张中油墨渗透压力分布的级数解

陆利坤¹, 刘福平¹, 谢名优²

(1.北京印刷学院 信息工程学院,北京 102600; 2.汕头东风印刷股份有限公司,广东 汕头 515041)

摘要:目的 为解决印前印刷参数(印刷速度和印刷压力等)的选择问题,提出油墨渗透压力分布的级 数解法。方法 考虑纸张的压缩变化,利用一维渗流方程导出纸张中油墨渗透压力分布的时空演化级数 解;基于本级数解和实验数据,对印刷过程中油墨渗透压力分布进行数值实验,建立基于实验参数的油 墨渗透压力分布时空演化方程。结果 绘制出了可压缩纸张中油墨渗透压力分布时空演化曲线,实现了 印刷压力分布的时空演化模拟。结论 得到了油墨在可压缩纸张中渗透压力的级数解解析方法,可以实 现油墨渗透压力分布时空演化的定量解析计算与模拟,为印前印刷参数的选择与设计提供了理论依据。 关键词:油墨:渗透深度;可压缩纸张;渗透时空演化

中图分类号: TS802.5; TS805 文献标识码: A 文章编号: 1001-3563(2021)15-0142-06 DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2021.15.016

Series Solution of Ink Penetration Pressure Distribution in Compressible Paper

LU Li-kun¹, LIU Fu-ping¹, XIE Ming-you²

(1.Institute of Information Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China;2.Shantou DongFeng Printing INC, Shantou 515041, China)

ABSTRACT: In order to solve the problem of selecting prepress printing parameters (printing speed, printing pressure, etc.), a series solution of ink penetration pressure distribution was proposed. Considering the change of paper compression, the series solution of the time-space evolution of ink penetration pressure distribution in paper was derived using one-dimensional seepage equation; based on the numerical solution and experimental data, the numerical experiment of ink penetration pressure distribution in printing process was carried out, and the time-space evolution equation of ink penetration pressure distribution based on experimental parameters was established. The time-space evolution curve of ink penetration pressure distribution in compressible paper was drawn, and the time-space evolution simulation of printing pressure distribution was realized. This paper presents a series analytical method of ink penetration pressure in compressible paper, which can realize the quantitative analytical calculation and simulation of the spatial and temporal evolution of ink penetration pressure distribution, and provide a theoretical basis for the selection and design of prepress printing parameters.

KEY WORDS: ink; penetration depth; compressible paper; temporal and spatial evolution permeability

在印刷过程中,油墨的渗透性与孔隙率、油墨特 性、印刷速度、印刷压力等因素有关^[1-4]。油墨在高 速转印时,力的作用时间短、渗透速度快,在转印结 束时,油墨在纸张内部的渗透同时结束^[5-8]。油墨的 渗透性对印刷品的质量有很大的影响,若油墨渗透 性强(快)则易出现印透现象,若油墨渗透性弱(慢)

收稿日期: 2020-12-29

基金项目:广东省重大科技专项(2019ST039)

作者简介:陆利坤(1971-),男,北京印刷学院讲师,主要研究方向为数字喷墨印刷技术、电子信息技术。

则不利于油墨在纸张表面的干燥。当印刷结束时 油墨干燥还尚未完成,则易造成印张之间的蹭脏问 题^[1,5-8],因此,人们十分重视油墨的渗透问题。在 实验和理论方面已经有相当多的研究报道,但大部分 都基于不可压缩纸张^[8-11],目前还尚未涉及可压缩纸 张中油墨渗透性的理论计算问题,更没有相关印刷过 程中油墨渗透压力分布时空演化的研究报道。由于油 墨渗透在印刷过程中的时空演变对于了解油墨渗透 的机理和演化规律是非常必要的,对印刷方案设计具 有重要的参考价值,因此,在考虑纸张变形的基础上, 基于一维渗流方程,研究可压缩纸张油墨渗透压的分 布,导出印刷过程中油墨在纸张中渗透压分布时空演 化的级数解。结合实验数据,给出1个数值模拟算例, 实现油墨渗透过程中压力分布的定量计算。文中研究 以期为考虑纸张变形的印前制备和印刷方案设计(无 实验条件)提供理论依据和处理方法。

可压缩纸张中油墨渗透的时空演 化级数解

在印刷过程中,油墨渗透只表现出印刷字体边缘的二维特征。如果油墨在给定时刻的渗透深度 x(ξ), x方向存在印刷压力的梯度分布,那么油墨的渗透就 可以简化为一维问题。油墨渗流的初始边值问题见式 (1-3)^[12-16]。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \qquad \qquad 0 < x < x_c \tag{1}$$

$$p|_{x=0} = p_{\rm e}, \quad p|_{x=x_{\rm e}} = p_{\rm i}, \quad \eta = \frac{k}{\varphi \mu c_{\rm t}}$$
 (2)

$$p(x,0) = p_{\rm i} \tag{3}$$

式中: p为压强 (Pa); p_e 为印压 (Pa); μ 为 油墨粘度系数(Pa·s); k为油墨在纸张中的渗透率 (D); c_i 为综合压缩系数 (Pa⁻¹); x_c 为渗透油墨前 沿动界面的边界位置坐标(m); p_i 初始压强(Pa); φ 为纸张的孔隙度 (无量纲); k_{φ} 称为渗孔比 (D), $k_{\varphi} = k/\varphi$ 。令:

$$p = w + p_{\rm d}$$
, $w = \frac{x}{x_{\rm c}}(p_{\rm i} - p_{\rm e}) + p_{\rm e}$ (4)

式中: *p*_i为液气界面处的压强(Pa)。 油墨渗透的初始边值问题为:

$$\frac{\partial^2 p_{\rm d}}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p_{\rm d}}{\partial t} \qquad \qquad 0 < x < x_{\rm c} \tag{5}$$

$$p_{\rm d}|_{x=0} = 0$$
 $p_{\rm d}|_{x_{\rm c}} = 0$ (6)

$$p_{d|t=0} = p_{i} - w = p_{i} - \frac{x}{x_{c}}(p_{i} - p_{e}) - p_{e} =$$

$$(p_{i} - p_{e})(1 - \frac{x}{x_{c}})$$
(7)

式 (5) 通 解 为
$$p_d(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \beta_n x + B_n \sin \beta_n x) e^{-\eta \beta^2 t}$$
。

由边界条件式(6)得: $A_n = 0$, $\beta_n = \frac{n\pi}{x_c}$, n = 0, 1, 2...,所以有:

$$p_{\rm d}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{x_{\rm c}} x {\rm e}^{-\eta \left(\frac{n\pi}{x_{\rm c}}\right)^2 t}$$
(8)

由初始条件得:

$$p_{d}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n} \sin \frac{n\pi}{x_{c}} x = (p_{i} - p_{e}) \left(1 - \frac{x}{x_{c}} \right) = \phi(x)$$
(9)
将 $\phi(x)$ 展成三角函数得:

$$B_{n} = \frac{2}{x_{c}} \int_{0}^{x_{c}} \sin \frac{n\pi}{x_{c}} x dx = \frac{2}{x_{c}} \int_{0}^{x_{c}} (p_{i} - p_{e}) \left(1 - \frac{x}{x_{c}}\right) \sin \frac{n\pi}{x_{c}} x dx = \frac{2}{x_{c}} (p_{i} - p_{e}) \left[-\left(1 - \frac{x}{x_{c}}\right) \frac{x_{c}}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{x_{c}} x - \frac{1}{x_{c}} \left(\frac{x_{c}}{n\pi}\right)^{2} \sin \frac{n\pi}{x_{c}} x \right]_{0}^{x_{c}} = \frac{2}{x_{c}} (p_{i} - p_{e}) \frac{x_{c}}{n\pi} = \frac{2(p_{i} - p_{e})}{n\pi}$$
(10)

式(5-7)的齐次边界解为:

$$p_{d}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(p_{i} - p_{e})}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{x_{e}} x e^{-\eta \left(\frac{n\pi}{x_{e}}\right)^{2} t}$$
(11)
将式 (11) 代入式 (4), 得:
 $p(x,t) = w(x,t) + p_{d}(x,t) =$

$$\frac{(p_{\rm i} - p_{\rm e})}{x_{\rm e}} x + p_{\rm e} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(p_{\rm i} - p_{\rm e})}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{x_{\rm e}} x e^{-\eta \left(\frac{n\pi}{x_{\rm e}}\right)^2 t}$$
(12)

式(12)为油墨在可压缩纸张中渗透的时空演化 级数解,方程由 2 个部分组成。其中, $w(x,t) = \frac{(p_i - p_e)}{x_e}x$,与时间无关,仅为空间坐标x的线性函数; $p_d(x,t)$ 不仅描述了油墨压力随空间的变化,还描述了随时间的变化;方程(12)描述了整个加压印刷过程中油墨压力随时空的变化情况,其分布与印刷压力有重要关系。另外,方程中含有随时间变化的油墨渗透动界面位置坐标为 x_e ,是与时间、纸张、油墨、印刷参数相关的复杂函数,这需要用下面的方法求解。

2 压缩纸张中渗透油墨前沿动界面位 置坐标 x_c的计算方法

对式(1)作玻耳子曼变换,即设 $u_c = \frac{x_c^2}{4\eta t}$, $u = \frac{x^2}{4\eta t}$,则式(1)变为:

μm

式中: $\operatorname{erf}(\sqrt{u})$ 为误差函数。由边界条件式(2) 得:

$$A = p_{e} / 2 \operatorname{erf}\left(\frac{x_{e}}{\sqrt{4\eta t}}\right), \quad B = p_{i},$$

$$p(x,t) = \frac{p_{e}}{2\operatorname{erf}\left(\frac{x_{e}}{\sqrt{4\eta t}}\right)} \left[-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\eta t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_{e}}{\sqrt{4\eta t}}\right)\right] + p_{i}$$
(15)

因 A 为常数,这要求 $u_c = \frac{x_c^2}{4\eta t}$, u_c 为常数,设 $x^2 = Ct$ 则有:

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \frac{x_{\mathrm{c}}}{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{t}} \tag{16}$$

式中: $\frac{dx_{c}}{dt}$ 为油墨流动界面的流动速度。另一方 面由 Darcy 定理得油墨流动界面的运动速度应为流 量 Q 除以有效过墨面积 S_{e} , 则有 $S_{e} = \varphi S$, 所以 $Q = vS_{e} = \varphi S \frac{dx_{c}}{dt} = -S \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=x_{c}}$, 由式 (14—15)得: $\varphi \frac{dx_{c}}{dt} = \frac{k}{\mu} A \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} 2 \frac{x}{4\eta t}\Big|_{x=x_{c}} = \frac{p_{e}}{erf(x_{c}/\sqrt{4\eta t})} \frac{k}{\mu} \frac{1}{\sqrt{4\eta t}} e^{-\frac{x_{c}^{2}}{4\eta t}}$ (17) 比较式 (16—17)得:

$$x_{\rm c} = \frac{2p_{\rm c}}{\exp\left(x_{\rm c}/\sqrt{4\eta t}\right)} \frac{k}{\varphi\mu} \sqrt{\frac{t}{\eta}} e^{-\frac{x_{\rm c}^2}{4\eta t}}$$
(18)

式(18)为在可压缩纸张中渗透油墨前沿动界面 位置坐标 x_c 的计算公式(油墨的加压即时渗透深度)。 x_c 的变化与加压印刷时间、边界印压 p_c 、油墨粘度 μ 、 纸张孔隙率 ϕ 和纸张的渗透率等有关。这一方程对油 墨的加压即时渗透深度是一个非线性方程,并且还是 一个隐式方程,求解 x_c 需要用数值方法计算,其中纸 张渗透率目前还没有具体的测量实验方法,因此只能 采 用 文 献 [9 — 10]的方法直接计算渗孔比 $k_{\varphi}(k_{\varphi} = k/\varphi)$ 。为了避开因通过直接测量参数 k 和 ϕ 所带来的不便,式(18)可直接模拟可压缩纸张中渗 透油墨前沿动界面的时空演变。

3 油墨在可压缩纸张中渗透深度的实验测量

主要仪器及设备: MTS-7000E, 金相显微镜, 桂 林桂光仪器有限公司; IGTAIC2-5, 印刷适性测试仪, 荷兰 IGT 测试系统公司; 400 mm×60 mm, 200 克金 盾铜纸; 光亮快干胶印品红油墨。

实验条件:温度为23℃,相对湿度为37%。

步骤与方法:打样前,测量纸张上油墨层的厚度 (2.2185 μm),然后在印刷适性测试仪上打样。通过 切割法测量油墨的渗透深度,首先将样张切割,再将 印刷纸张的横截面正对金相显微镜的光学孔,微调到 显示器上看到纸上油墨明显的渗透痕迹,再拍摄,并 将照片输入计算机,利用照片和纸张的厚度参数计算 机可直接测量油墨的渗透深度及墨层的厚度。印刷适 性测试仪的印刷压力用总压力表示。当压力为400, 500,600,700,800,900 N时,压痕宽度分别为6, 6.4,6.9,7.4,8,8.7 mm。在上述压力下,打印速 度分别为0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9 m/s。实验中 使用的是宽度为0.05 m的涂胶圆盘,因此,转换成 印压后,打印速度分别为1.33,1.56,1.75,1.90,2.00, 2.06 MPa。油墨在纸张中的渗透深度数值见表1。

表 1	油墨在 200 g 金盾铜中的渗透深度
Tab.1 Permeating depth of	printing ink in 200 g Jindun copper plate paper

$v/(m \cdot s^{-1})$	400	500	600	700	800	900
0.4	31	32	34	35	37	40
0.5	29	31	32	33	36	39
0.6	28	29	30	32	33	36
0.7	27	28	29	31	32	35
0.8	25	26	28	29	31	32
0.9	22	24	26	28	29	30

由表1可知,得到油墨穿透深度的测量数据。印 刷速度相同,印刷压力越大的样品油墨穿透深度越 大;在相同的印刷压力下,印刷速度越低时渗透深度 越大。

4 可压缩纸张中油墨渗透时空演化计 算分析

目前,在印刷工业中还没有对纸张渗透率的测量 方法,常用基于毛细管理论的奥尔森方程来估算油墨 的渗透深度。文中利用油墨渗透深度测量值,由文献 [9,10]计算纸张渗孔比的方法来实现纸张渗孔比的计 算。计算时取(印刷打样前的实验测量结果) $\sigma=40$ mN/m, $\mu=65$ Pa·s, $c_t=2.0$ μ Pa⁻¹ (σ , μ 和 c_t 分别为油 墨的表面张力系数、油墨年度系数 μ 和纸张综合压缩 系数)。由于包有橡胶的印辊具有弹性,油墨又有一 定的流动性,因此在印刷过程中当印压发生变化时, 压印的宽度是变化的。即便印刷速度不变,印压时间 也可能是随印压而变化,因此笔者利用二次曲线拟合 方法实现印压时间随印压变化的数值计算。针对同一 种型号的纸张所获得的实验测量结果见表 1, 在 6 种 压力和 6 种印刷速度条件下测量得到油墨渗透深度 (36组数据)。为对油墨加压渗透过程的进一步认识, 首先利用油墨渗透深度测量值和文献[9—10]渗孔比 的计算方法,计算出纸张的渗孔比 k_g=k/q,再由所获 得的 k。和式(18)绘制了油墨在纸张中渗透的时空 演化曲线(见图1)。由图1可知,印刷速度为0.4, 0.6, 0.8 m/s, 印压为 400, 600, 800 N 时油墨在 200 g金盾铜纸张中渗透的时空演化曲线,清楚地显示了 油墨前沿随时间的变化情况,曲线的右方终点为加压 渗透结束时油墨前沿的位置坐标。



图 1 可压缩纸张中渗透油墨前沿动界面位置 坐标即时变化曲线

Fig.1 Instantaneous change curve of position coordinates of moving interface of ink front in compressible paper

可压缩纸在不同时间油墨压力的空间分布曲线 (见图 2),对应打印速度分别为 0.4,0.6,0.8 m/s。 当压力为 400,600,800 N时,油墨在 200 g 金盾铜 纸中的渗透空间分布,曲线随空间位置发生非线性变 化。在加压印刷开始阶段,曲线变化幅度较大,这是 印刷压力的作用,但随着加压渗透的结束(印刷压力 为 0 后油墨仍继续渗透),油墨压力的变化变缓,这 一变化特点恰好符合预期估计结果。





可压缩纸在不同空间位置的油墨压力实时变化 曲线见图 3,当印刷速度为 0.4,0.6 m/s,印刷压力 为 400,600 N 时,200 g 金盾铜纸油墨渗透压强即时 变化,曲线在加压开始的一段时间内处于水平是因为 在这一段时间内油墨还没有到达该空间位置,此位置 的压强仍为无墨时刻的压强(即初始压强),当油墨 到达此空间位置后,则随加压印刷时间的增长油墨压 强呈非线性增大。



图 3 在不同空间位置可压缩纸张中油墨压强的即时 变化曲线

Fig.3 Instantaneous curve of ink pressure in compressible paper at different spatial positions

5 结语

文中推导了可压缩纸张在油墨印刷过程中渗透 压分布的时空演化级数解,最后得到了油墨渗透压分 布时空演化的显式表达式,油墨渗透压与渗透深度呈 非线性关系。基于油墨渗透深度实验,实现了纸张渗 孔比的计算,并利用渗孔比计算了不同压力和印刷速 度下可压缩性纸张中油墨的压力分布。理论模拟计算 结果表明,油墨在纸张中渗透时的压强随空间位置的 增大呈非线性减小,加压印刷初始曲线变化较快,随 着加压渗透的结束,油墨压强变化变缓;在不同位置 油墨压强的瞬时变化曲线在加压开始的初期基本处 于水平(为无墨时的压强),当油墨动界面前沿到达 某空间某位置后,随加压印刷时间的延长油墨压强呈 非线性增大。文中给出了可压缩纸张油墨渗透压力分 布的级数解,为理解油墨渗透过程和印刷方案设计提 供了一种定量计算及预测的实用方法。

参考文献:

- [1] 董明达, 王城. 纸张油墨的印刷适性[M]. 北京: 印刷工业出版社, 1993: 76—92.
 DONG Ming-da, WANG Cheng. Printability of Paper and Ink[M]. Beijing: Print Industry Press, 1993: 76—92.
- [2] 向阳, 王杰先, 齐晓堃. 印刷材料及适性[M]. 北京: 印刷工业出版社, 2000: 65—91.
 XIANG Yang, WANG Jie-xian, QI Xiao-kun. Printability and Material of Prints[M]. Beijing: Print Industry Press, 2000: 65—91.
- [3] 车茂丰,陈振康,金培奇.现代实用印刷技术[M]. 上海:上海科学普及出版社,2004:296—342.
 CHE Mao-feng, CHEN Zhen-kang, JIN Pei-qi. Modern Printing Technology[M]. Shanghai: Shanghai Science Popular Press, 2004: 296—342.
- [4] 王正青,方图南,荆建芬,等.油墨的印刷适性与流 变性之间的关系[J].高分子材料科学与工程,1997, 13(6):141—145.

WANG Zheng-qing, FANG Tu-nan, JING Jian-fen, et al. Relationship Between Printing Applicability and Rheological Properties[J]. Polymeric Materials Science and Engineering, 1997, 13(6): 141—145.

- [5] 向阳, 卢谦和, 王宗和. 胶印新闻纸油墨渗透的研究
 [J]. 中国造纸, 1997, 16(1): 26—30.
 XIANG Yang, LU Qian-he, WANG Zong-he. Study on the Ink Penetration of Offset Newsprint[J]. China Pulp & Paper, 1997, 16(1): 26—30.
- [6] 顾小萍, 唐正宁. 对喷墨印刷中油墨铺展和渗透的 研究[J]. 包装工程, 2005, 26(5): 98—100.
 GU Xiao-ping, TANG Zheng-ning. Research on Ink Penetration and Spreading in Ink-Jet Printing[J].
 Packaging Engineering, 2005, 26(5): 98—100.

- [7] 陈嘉翔. 浮选脱墨流体动力学的基本过程及主要参数[J]. 中国造纸, 2005, 24(2): 44—48.
 CHEN Jia-xiang. Hydrodynamics of Flotation Deinking: Elemental Processes of Flotation Deinking and Its Main Parameters[J]. China Pulp & Paper, 2005, 24(2): 44—48.
- [8] 刘福平,齐晓堃,王安玲. 纸张毛细管半径测量的新 方法[J]. 中国造纸学报, 2006, 27(4): 81—84.
 LIU Fu-ping, QI Xiao-kun, WANG An-ling. The New Measuring Method of Capillary Radius of Paper[J]. Transactions of China Pulp & Paper, 2006, 27(4): 81—84.
- [9] 刘福平,齐晓堃,王安玲.印刷过程中油墨渗透深度的计算与实验研究[J].包装工程,2006,27(1): 71—75.

LIU Fu-ping, QI Xiao-kun, WANG An-ling. Numerical Calculation and Experimental Study of Permeating Depth of Printing Ink in Porous Papers in Printing[J]. Packaging Engineering, 2006, 27(1): 71–75.

[10] 刘福平,齐晓堃,王安玲. 幂律油墨在纸张中渗透深度的计算与实验[J]. 过程工程学报,2007,7(2):216—222.

LIU Fu-ping, QI Xiao-kun, WANG An-ling. Numerical Calculation and Experimentation of Permeating Depth of Power-Law Printing Ink in Porous Paper Printing[J]. The Chinese Journal of Process Engineering, 2007, 7(2): 216—222.

[11] LEE S L, YANG J H. Modeling of Darcy-Forchheimer

Drag for Fluid Flow Across a Bank of Circular Cylinders[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1997, 21(13): 3149—3155.

- [12] TANG Y, YILDIZ T, OZKAN E, et al. Effects of Formation Damage and High-Velocity Flow on the Productivity of Perforated Horizontal Wells[C]// SPE77534 San Antonio Texas, 2002.
- [13] WANG X, THAUVIN F, MOHANTY K K. Non-Darcy Flow Through Anisotropic Porous Media[J]. Chemical Engineering Science, 1999(54): 1859–1869.
- [14] 孔祥言.高等渗流力学[M].合肥:中国科学技术大学出版社, 1999: 401—408.
 KONG Xiang-yan. Advanced Mechanics of Fluids in Porous Media[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1999: 401—408.
- [15] 王家禄, 沈平平, 刘玉章, 等. 非牛顿流体在非均质 油 藏 渗 流 压 力 场 实 验 [J]. 力 学 学 报, 2003, 35(1): 74—79.
 WANG Jia-lu, SHEN Ping-ping, LIU Yu-zhang, et al. Experimental Investigation of Non-Newtion Fluid Flow in Horizontal Heterogeneous Porous Media[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2003, 35(1): 74—79.
- [16] 刘福平,杨长春. 渗透率场敏感系数的数值计算[J]. 地球物理学报,2003,46(1):131—137.
 LIU Fu-ping, YANG Chang-chun. Numerical Calculation of Sensitivity Coefficients to a Permeability Field[J]. Chinese J Geophys, 2003, 46(1):131—137.