

## 多重门限奇异值分解方法的实例验证

傅苗苗<sup>1,2</sup>, 王军<sup>1,2</sup>, 卢立新<sup>1</sup>, 姜咪<sup>2</sup>

(1.江南大学 a.机械工程学院 b.江苏省先进食品装备制造技术重点实验室, 江苏 无锡 214122;  
2.汕头东风印刷股份有限公司, 广东 汕头 515064)

**摘要:** **目的** 提出一种基于奇异值分解(SVD)技术和 Hanke 矩阵的多重门限奇异值分解方法(MTSVD), 对测量源数据进行降噪, 使其更接近理论值, 减少试验误差对后续计算结果的影响。**方法** 对获得的系统频响函数(FRFs)施加10%的随机误差, 之后利用文中提出的MTSVD方法进行降噪处理, 并与未经过去噪处理的预测结果以及经奇异值累积法获得的降噪结果进行对比。**结果** 利用MTSVD方法对试验获取的耦合系统频响函数进行处理后, 得到的修正值更接近理论值, 并且该方法的降噪效果优于现有的奇异值累积法。**结论** 验证结果表明文中提出的MTSVD方法能有效降噪, 减少试验测量源数据携带的误差, 使其更接近理论值, 因此该方法在运输包装领域具有良好的可行性和应用前景。

**关键词:** 逆子结构方法; 频响函数; 多重门限奇异值分解

**中图分类号:** TB485.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2021)21-0176-05

**DOI:** 10.19554/j.cnki.1001-3563.2021.21.024

### Example Verification of Multi-Threshold Singular Value Decomposition Method

FU Miao-miao<sup>1,2</sup>, WANG Jun<sup>1,2</sup>, LU Li-xin<sup>1</sup>, JIANG Mi<sup>2</sup>

(1a.School of Mechanical Engineering b.Key Laboratory of Advanced Food Equipment Manufacturing Technology of Jiangsu Province, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2.Shantou Dongfeng Printing Co., Ltd., Shantou 515064, China)

**ABSTRACT:** The work aims to propose a multi-threshold singular value decomposition (MTSVD) method based on singular value decomposition (SVD) and Hanke matrix to reduce the noise of source data, make it closer to the theoretical value and reduce the effect of experiment error on subsequent calculation. First, the obtained frequency-response function (FRF) of the system was added with 10% random error. Then, the MTSVD method proposed in the paper was used to reduce the noise. Finally, the results were compared with the prediction results without noise reduction and the noise reduction results obtained by singular value accumulation. After the MTSVD method was used to process the frequency response function of the coupling system obtained from the experiment, the modified value was closer to the theoretical value, and the noise reduction effect of this method was better than the existing singular value accumulation method. The verification results show that the MTSVD method proposed in the paper can effectively reduce the noise, decrease the error carried by the test measurement source data and make it closer to the theoretical value. Therefore, this method has prominent feasibility and application prospect in transport packaging.

**KEY WORDS:** inverse sub-structuring method; frequency response functions; multi-threshold SVD

收稿日期: 2021-03-03

基金项目: 国家一流学科建设轻工技术与工程(LITE 2018-29); 国家自然科学基金(51205167); 江苏省自然科学基金(BK20151128)

作者简介: 傅苗苗(1996—), 女, 江南大学硕士生, 主攻运输包装。

通信作者: 王军(1982—), 男, 博士, 江南大学教授、博导, 主要研究方向为运输包装。

目前逆子结构分析方法以其独特的优势在各个领域都受到了研究人员的广泛关注, 研究人员也提出了不同的解耦方法<sup>[1-5]</sup>, 而这些解耦方法建立于试验测量的耦合系统频响函数基础之上, 在实际物流运输包装系统的工程应用中, 耦合系统频响函数的测量通常会受到测试操作上的限制(如激振-响应点的等位置选择与实施等)或测试环境的干扰(如来自环境中的噪音干扰等), 从而导致较大的测量源频响函数存在误差, 这些误差在基于逆子结构方法对系统解耦, 预测子结构频响函数的过程中, 误差很有可能会随着矩阵的求逆运算被放大<sup>[6-7]</sup>, 使预测的理论结果的不可靠, 因此, 为了保证预测结果的可靠性, 减小试验误差对解耦预测结果的影响, 必须在测试数据进一步应用之前消除或减小测量数据所携带的误差<sup>[8-10]</sup>。现有去除噪音的方法<sup>[11-14]</sup>通常都是基于奇异值分解(SVD)技术的截断奇异值方法(TSVD), 其原理: 保留大的奇异值, 舍弃小的奇异值即将小的奇异设置为 0。截断奇异值方法的关键在于截断阈值的选择, 在截断阈值选择恰当的情况下, 该方法能在一定程度上减少测量源数据携带的误差, 但是当截断阈值选择不恰当, 所选截断阈值过大或者过小时, 则会出现误差过消除(丢失有效信息)或误差消除不彻底的情况。同时, TSVD 方法通常适用于奇异值的分布呈阶梯型的情况, 当奇异值的分布呈均匀下降时, 则很难选择截断阈值, 该方法的适用性还存在较大争议<sup>[15]</sup>, 因此文中提出一种多重门限值奇异值分解方法(MTSVD), 根据奇异值的分布情况选择多个截断门限值, 对不同段的奇异值做不同程度的修正, 并结合 Hankel 矩阵实现测试数据的降噪, 抑制测量源数据携带的误差对解耦预测结果的影响。

## 1 相关理论

### 1.1 基于逆子结构方法的二级单点柔性耦合系统解耦

线性耦合系统在受到外界激振力的作用时, 耦合系统的响应与激励在频域中的动力学方程的表达式为:

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{X(\omega)\} = \{f(\omega)\} \quad (1)$$

式中:  $[M]$ ,  $[C]$ 和 $[K]$ 分别为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $\{X(\omega)\}$ 为耦合系统的响应;  $\{f(\omega)\}$ 为外部激励。

$$[D] = -\omega^2[M] + i\omega[C] + [K] \quad (2)$$

式中: 矩阵  $D$  为阻抗矩阵, 其包含了系统结构的固有特性。对于激励与响应之间的关系通常用频率响应传递函数(FRFs)矩阵表示, 记为  $H(\omega)$ , 频响函数矩阵  $H(\omega)$ 与阻抗矩阵关系为:

$$H(\omega) = D(\omega)^{-1} \quad (3)$$

即:

$$H(\omega) = (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])^{-1} \quad (4)$$

式(4)用来描述结构的激励与响应之间的关系。

文中将利用 Lim 等<sup>[1]</sup>提出的逆子结构方法基于含有随机误差的系统频响函数对耦合系统  $S$  进行解耦预测子结构  $B$  的频响函数, 该方法不需要获取子结构的频响函数, 而是完全由耦合系统  $S$  的频响函数来预测子结构的频响函数。解耦预测公式为:

$$H_{B,c(b)c(b)} = \left( H_{S,c(a)c(a)} - H_{S,c(a)c(b)} \right)^{-1} \cdot \left( H_{S,c(a)c(a)} H_{S,c(b)c(b)} - H_{S,c(a)c(b)}^2 \right) \quad (5)$$

式中:  $S$  为耦合系统;  $B$  为待测子结构;  $c$  为耦合界面频响函数;  $a, b$  分别为位于子结构  $A$  和子结构  $B$  的耦合点。

### 1.2 多重门限奇异值分解方法

逆子结构分析方法建立在试验测量的耦合系统频响函数(FRF)基础之上, 若测量的系统频响函数受测试环境中的噪音干扰, 而携带一定的随机误差, 则这些随机误差将会随着后续矩阵求逆的运算被放大, 导致解耦预测的子结构频响函数不可靠。为了减少试验测试的原始数据携带的误差, 并抑制解耦过程由于矩阵求逆带来的误差放大问题, 保证解耦预测子结构频响函数的可靠性, 需要对试验测量的系统频响函数数据进行降噪处理, 之后再进一步应用于子结构频响函数的预测。为了解决这个问题, 该节提出了多重门限奇异值分解(MTSVD)方法, 即对奇异值进行不同程度的修正, 设矩阵奇异值为  $\delta$ , 奇异值数量为  $r$ , 修正模型为:

$$\tau_i = \begin{cases} \delta_i & i \leq t_1 \\ (1/(\delta_{t_1}/\delta_i)) \times \delta_i & t_1 < i \leq t_2 \\ (1/(\delta_{t_1}/\delta_i)) \times (1/(\delta_{t_2}/\delta_i)) & t_2 < i \leq t_3 \\ 0 & i > t_3 \end{cases} \quad (6)$$

通常, 大的奇异值对应信息量大的信号分量, 携带更多有用结构信息, 小的奇异值对应信息量小的信号分量, 携带的结构信息较少, 也更容易受到噪音的污染, 因此从式(6)可以看出多重门限奇异值分解(MTSVD)方法保留了大的奇异值, 对大的奇异值不做修正, 将部分小的奇异值设置为 0, 对中间段的较大奇异值和较小奇异值做不同程度的修正。

1) 奇异值门限  $t_1$  的确定。奇异值可表示其对应的信号分量所携带信息量, 奇异值越大对应信号分量的信息量越大, 越能代表原始信号的特征, 相反奇异值越小对应信号分量的信息量越小, 越不能反映原始信号的特征, 同时也越容易受到噪音的干扰, 甚至被噪音信号淹没, 因此基于奇异值平方的累计量来确定此奇异值门限, 来确定第 1 个奇异值门限, 即能最大程度反应原始信号的部分较大奇异值。文中将奇异值平方的累计量用  $T_1$  表示。

$$T_1 = \sum_1^i (\delta_i)^2 \quad 1 \leq i \leq r \quad (7)$$

通过作出奇异值相对强度  $T_1$  与下标的函数曲线, 然后找到函数曲线的突变点 (当  $T_1$  的累加值达到某个值之后不再明显增加), 将该突变点对应的下标作为第 1 个奇异值门限  $t_1$ 。

2) 奇异值门限  $t_2$  和  $t_3$  的确定。文中通过奇异值的大小和分布来确定奇异值门限  $t_2$  和  $t_3$ 。对于降噪阶次的选择, 有学者根据奇异值曲线法来进行选择, 即根据奇异值的比值变化来确定降噪阶次, 但是大多数情况下, 奇异值比值曲线并没有出现突变点且仍然呈现均匀下降的趋势, 无法明显看出奇异值的分布情况。基于此, 文中选择利用奇异值比值平方的数量级对其进行区分, 以此确定文中的第 2 和第 3 个奇异值门限, 对相近数量级的奇异值作同一程度的修正。文中将奇异值比值平方用  $T_{2,3}$  表示。

$$T_{2,3} = \left( \frac{\delta_i}{\delta_1} \right)^2 \quad 1 \leq i \leq r \quad (8)$$

基于对  $T_{2,3}$  求取的数量级来对奇异值特征进行区分, 并确定第 2 个奇异值门限  $t_2$  和第 3 个奇异值门限  $t_3$ 。

## 2 集总参数模型分析

建立一个集总参数模型见图 1, 将该模型视为由子结构 A 和子结构 B 构成的耦合系统 S。集总参数模型的相关参数见表 1。通过该集总参数模型对 MTSVD 方法进行验证, 并与奇异值的累计贡献率法进行对比。统计表明, 将当奇异值的累计贡献率达到 80%~90% 时所对应的点作为截断阈值时能获得较好

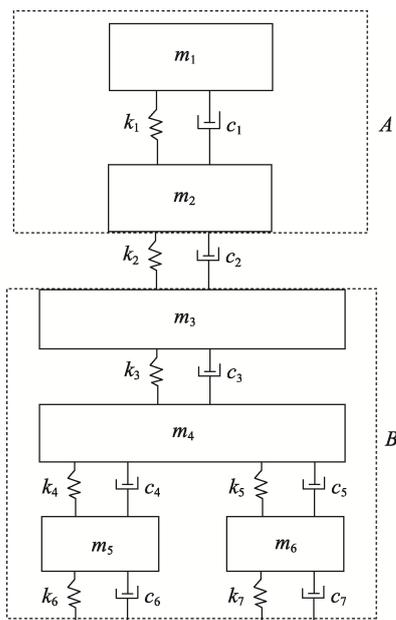


图 1 柔性耦合系统集总参数模型

Fig.1 Lumped parameter model of flexibly coupled system

表 1 集总参数模型详细参数  
Tab.1 Parameters of lumped parameter model

质量/kg	刚度/(kN·m <sup>-1</sup> )	阻尼/(N·s·m <sup>-1</sup> )
$m_1=2$	$k_1=35$	$c_1=4$
$m_2=5$	$k_2=18$	$c_2=7$
$m_3=7$	$k_3=25$	$c_3=8$
$m_4=3$	$k_4=33$	$c_4=2$
$m_5=6$	$k_5=24$	$c_5=1$
$m_6=8$	$k_6=29$	$c_6=6$
	$k_7=70$	$c_7=3$

的去噪效果, 因此文中分别选择奇异值的累计贡献率分别为 80%, 85%, 90%, 并与 MTSVD 方法进行对比分析。

集总参数模型的验证步骤如下所述。

1) 基于式 (4) 计算得出耦合系统 S 的理论频响函数。

2) 对步骤 1 得出的耦合系统 S 理论频响函数分别施加 10% 的随机误差。

3) 将步骤 2 得到的含有误差的耦合系统频响函数序列构成 Hankel 矩阵。

4) 对步骤 3 的 Hankel 矩阵进行 SVD 分解。

5) 步骤 4 得到含有误差的原始数据的奇异值矩阵, 基于式 (6) 对含有误差的奇异值进行不同程度的修正, 得到新的奇异值矩阵。

6) 基于步骤 5 得到新的奇异值矩阵还原信号, 即得到去除噪音的耦合系统 S 的频响函数。

## 3 结果与分析

耦合点处的频响函数  $H_{S,c(a)c(b)}$  含有 10% 的随机误差的试验值, 见图 2a。基于图 2a 的试验值, 利用逆向子结构方法所预测的子结构 B 的频响函数  $H_{B,c(b)c(b)}$  值, 见图 2b。从图 2 可以看出, 频响函数  $H_{B,c(b)c(b)}$  预测值出现了很多虚假峰值、严重偏离理论值。这是由于耦合系统 S 的频响函数携带的 10% 的随机误差随着矩阵的求逆运算被放大, 从而导致预测值不可靠。对不同的系统频响函数施加 10% 的随机误差后, 利用文中提出的多重门限奇异值分解方法 (MTSVD) 和奇异值累积法对含有误差的耦合系统频响函数去噪后, 得到频响函数, 见图 3。从图 3a—c 可以看出, 基于奇异值累积率方法的降噪结果并不理想, 虽然在 0~30 Hz 的频率范围内有一定的降噪效果, 但在 30~50 Hz 频率范围内, 降噪后的结果严重偏离理论值。从图 3d 可以看出, 降噪后的系统频响函数与理论值更接近, 在整个频率范围内都能较好地反应系统频响函数的变化趋势, 因此该方法的降噪效果明显优于现有方法。

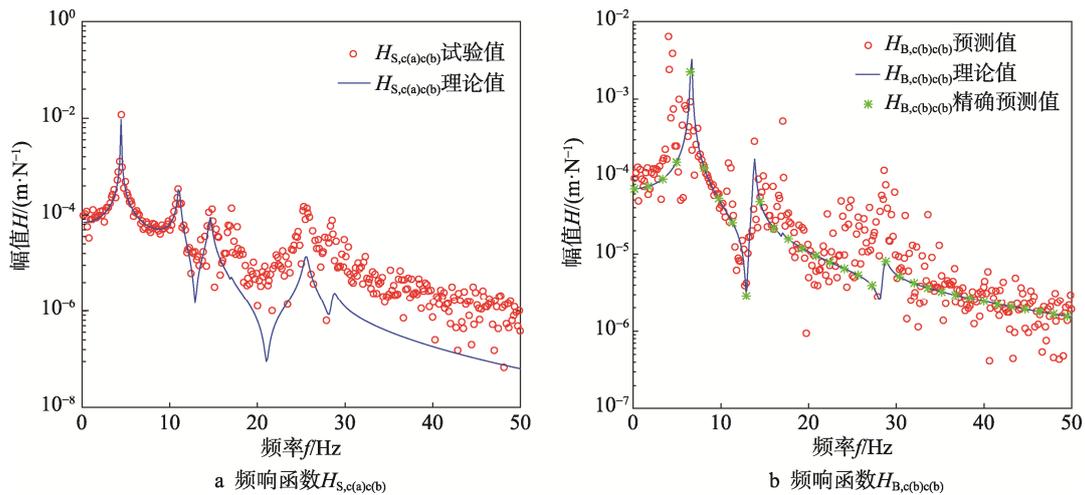


图 2 随机误差对预测结果的影响  
Fig.2 Influences of random errors on the prediction results

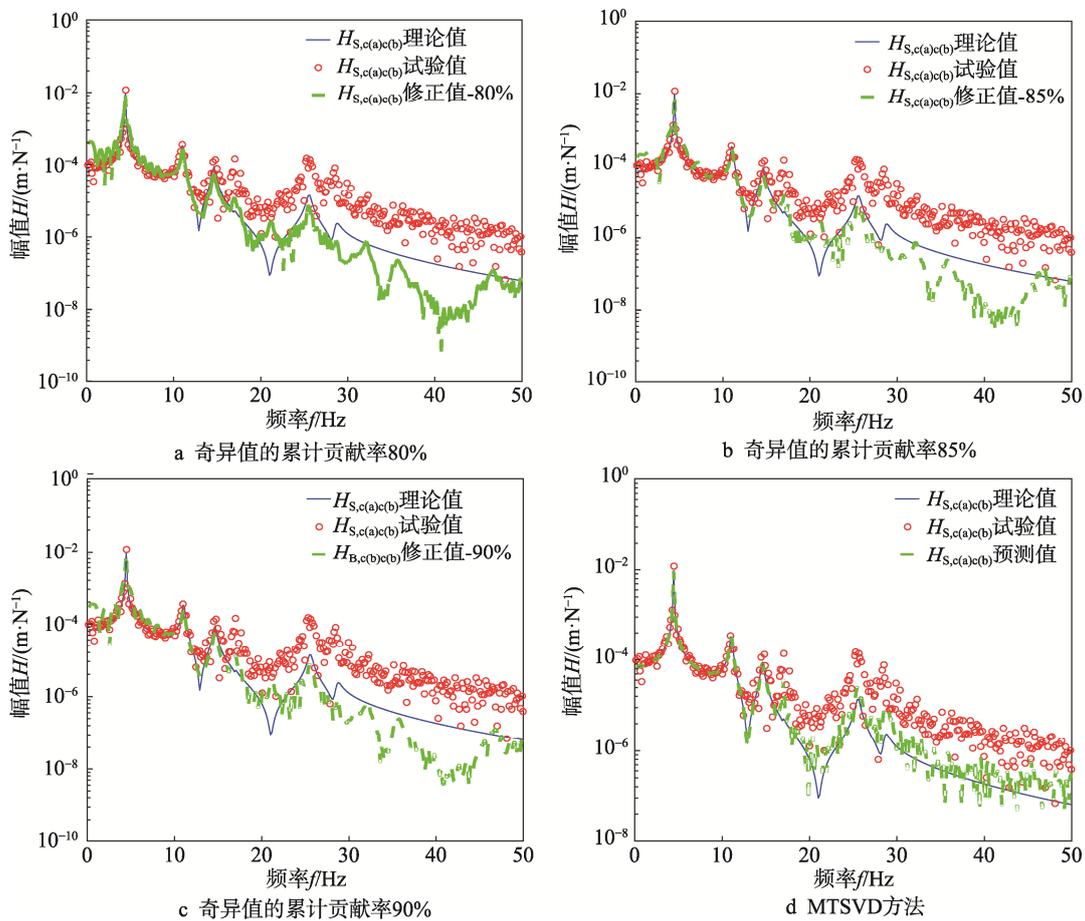


图 3 频响函数  $H_{S,c(a)c(b)}$   
Fig.3 FRFs of  $H_{S,c(a)c(b)}$

## 4 结语

文中提出了一种多重门限奇异值分解方法 (MTSVD), 顾及了奇异值局部差异性, 根据奇

异值的分布情况, 并对其做不同程度的修正, 能避免直接舍弃遗失部分信息。该方法与现有的仅基于奇异值累积贡献率的降噪方法相比, 其降噪效果更优。这是因为 MTSVD 方法并不仅仅只考虑较大的奇异值, 还将了“小”的奇异值纳入考虑范围, 因此, 该方法在

实现消除噪音导致的试验误差的同时能有效地保留结构信息,因此,基于此方法能有效抑制试验误差对后续运算带来的误差放大问题,在运输包装领域具有优秀的可行性和应用前景。

#### 参考文献:

- [1] ZHEN J, LIM T C, LU G. Determination of System Vibratory Response Characteristics Applying a Spectral-Based Inverse Sub-Structuring Approach, Part I: Analytical Formulation[J]. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 2004, 1: 1—30.
- [2] ZHEN J, LIM T C, LU G. Determination of System Vibratory Response Characteristics Applying a Spectral-Based Inverse Sub-Structuring Approach, Part II: Motor Vehicle Structures[J]. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 2004, 1: 31—67.
- [3] LIAO Xu-hui. Virtual Decoupling Method: A Novel Method to Obtain the FRFs of Subsystems[J]. *Arch Appl Mech*, 2017, 87(9): 1453—1463.
- [4] MERTENS L, PENNE L. Decoupling of Mechanical Systems Based on In-Situ Frequency Response Functions: the Link-Preserving Decoupling Method[J]. *Mechanical Systems Signal Process*, 2015, 56(4): 340—354.
- [5] WANG Zeng-wei, PENG Zhi-keng. Relationships Between the Decoupled and Coupled Transfer Functions: Theoretical Studies and Experimental Validation[J]. *Mechanical Systems Signal Process*, 2018, 98: 936—950.
- [6] KLERK D, VOORMEEREN D. Uncertainty Propagation in Experimental Dynamic Substructuring[A]// In Proceedings of The Twenty Sixth International Modal Analysis Conference, 2008: 187—207.
- [7] VOORMEEREN D, KLERK D. Uncertainty Quantification in Experimental Frequency Based Substructuring[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2010, 24(1): 106—118.
- [8] SANLITURK K Y, CAKAR O. Noise Elimination from Measured Frequency Response Functions[J]. *Mechanical Systems Signal Process*, 2005, 19(3): 615—631.
- [9] LIM T C. A Theoretical and Computational Study of The FRF-Based Substructuring Technique Applying Enhanced Least Square and TSVD Approaches[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 231(4): 1135—1157.
- [10] LI Tiang. Seismic Denoising in The Angle Domain Based on Singular Value Decomposition[J]. *Geophysical Prospecting for Petroleum*, 2019, 58(3): 427—432.
- [11] CAKAR O, SANLITURK K Y. Elimination of Noise and Transducer Effects From Measured Response Data[C]// Proceedings of the 6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Istanbul, Turkey, 2002: 274—352.
- [12] OTTE D, LEURIDAN J, GRANGIER H, et al. Coupling of Structures Using Measured FRF's by Means of SVD-Based Data Reduction Techniques[C]// Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, 1990: 213—220.
- [13] OTTE D, LEURIDAN J, GRANGIER H, et al. Prediction of The Dynamics of Structural Assemblies Using Measured FRF-Data: Some Improved Data Enhancement Techniques[C]// Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference, 1991: 909—918.
- [14] GIALAMAS T P, TSAHALIS D T, OTTE D and et al. Substructuring Technique: Improvement by Means of Singular Value Decomposition (SVD)[J]. *Applied Acoustics*, 2001, 62(16): 1211—1219.
- [15] 张俊, 李屹旭. 多门限值修正法及其在测量中的应用[J]. *贵州大学学报*, 2008(2): 133—137.  
ZHANG Jun, LI Yi-xu. Multi-Threshold Value Correction Method and Its Application in Measurement[J]. *Journal of Guizhou University*, 2008, 2(8): 133—137.