

# 一种用于物流快递分拣的 2-RPU/2-SPU 并联机构设计

樊文龙, 李瑞琴, 王春臻, 王志浩, 刘建国

(中北大学 机械工程学院, 太原 030051)

**摘要:** **目的** 针对目前大量的快递件需要进行分拣和搬运, 为解决人力成本问题并提高物流线上的自动化程度, 提出一种 2-RPU/2-SPU 并联机构。**方法** 用螺旋理论对此机构进行自由度分析, 求出此机构的运动约束。通过闭环矢量法求出该机构的位置逆解和各个支链间的相互约束条件。通过逆解和约束对该机构的运动进行仿真, 求出此机构的可达工作范围。**结果** 2-RPU/2-SPU 并联机构具有两转两移(2R2T) 4 个自由度, 分别是沿  $y_a$  轴移动, 沿  $z_a$  轴移动, 绕  $x_a$  轴转动, 绕  $y_a$  轴转动, 动作较灵活, 工作空间范围较大, 并且在机构运动过程中没有出现奇异位形的情况。**结论** 2-RPU/2-SPU 并联机构具有较大的工作范围, 可以在物流线上进行分拣工作, 并且在分拣过程中可以实现快速、精准控制, 工作过程较灵活, 运动性能良好, 其中 2R2T 的运动性能能更好地适应分拣机构斜置时的分拣。

**关键词:** 2-RPU/2-SPU; 并联机构; 逆运动学; 工作空间; 物流分拣

中图分类号: TB486; TH112 文献标识码: A 文章编号: 1001-3563(2022)07-0178-06

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2022.07.022

## Design of a 2-RPU/2-SPU Parallel Mechanism for Logistics and Express Sorting

FAN Wen-long, LI Rui-qin, WANG Chun-zhen, WANG Zhi-hao, LIU Jian-guo

(School of Mechanical Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**ABSTRACT:** The work aims to propose a 2-RPU/2-SPU parallel mechanism to solve the problem of labor cost and improve the degree of automation on the logistics line, in view of the need for sorting and handling of a large number of express items. Firstly, the degree of freedom of 2-RPU/2-SPU mechanism was analyzed with screw theory to obtain the motion constraints of the mechanism. The position inverse solution of the mechanism and the mutual constraints between limbs were obtained with closed-loop vector method. Through inverse solution and constraint, the motion of the mechanism was simulated, and the reachable working range of the mechanism was obtained. The 2-RPU/2-SPU parallel mechanism had four degrees of freedom (2R2T), namely, two rotations along  $x_a$  and  $y_a$  respectively and two translations along  $y_a$  and  $z_a$  respectively, which made the mechanism more flexible and had a large range of workspace, and there was no singularity in the process of mechanism motion. The 2-RPU/2-SPU parallel mechanism has large working range. It can perform the sorting work on the logistics line. In addition, it can realize fast and accurate control in the sorting process. It has relatively flexible working process and good motion performance, among which the motion performance of 2R2T can better adapt to the sorting when the sorting mechanism is placed in an incline position.

**KEY WORDS:** 2-RPU/2-SPU; parallel mechanism; inverse kinematics; workspace; logistics sorting

收稿日期: 2021-08-03

基金项目: 山西省重点研发计划(201803D421028, 201903D421051)

作者简介: 樊文龙(1997—), 男, 中北大学硕士生, 主攻机构理论与机器人技术。

通信作者: 李瑞琴(1964—), 女, 中北大学教授, 主要研究方向为机构理论与机器人技术。

随着社会的不断发展,人们对购物的需求不断提升,伴随着购物量的上升,物流中心的物品分拣会消耗大量的人力成本,而自动分拣机器人的出现打破了这个局面。并联机构由于具有动态误差小、精度高、运动惯性小、承载能力强等优势在物流线上有广泛应用。胡建等<sup>[1]</sup>设计了一种 2-RPU/UPS 并联机构用于流水线上的码垛和搬运。米文博等<sup>[2]</sup>分析了一种用于药品包装生产线上的 2-UPR/RSPR 并联机构,具有 2R2T 运动模式,所以此机构中需要 4 个驱动确保该机构能够稳定的运行,通过 D-H 法求出支链的运动参数,并求出该并联机构的工作空间。

Muralidharan 等<sup>[3]</sup>提出了一种并联机器人的设计方法,使并联机器人在给定安全工作区域内动态性能达到最优的尺寸设计。Peng 等<sup>[4]</sup>设计了一组三自由度并联机构的运动学和定向能力,分析了 Delta 机构与等效的 3-PRS 并联机构的运动学特性,求出机构与输出参数的耦合关系,并非奇异性。贾竣臣等<sup>[5]</sup>设计了一种 2T2R 并联机构并且求出了其位置逆解和工作空间,用以代替人工操作,从而提高工作效率。Guo 等<sup>[6]</sup>提出了一种基于螺旋理论的 4-RRCR 并联机构,证明了机构拥有正运动学简单,无平台奇异的优点。Sangveraphunsiri 等<sup>[7]</sup>提出了一种基于 H-4 族并联机构的混合五自由度机械臂的设计,对运动学、逆运动学和动力学模型进行了数值分析。

目前用于分拣的并联机构大部分都具有工作空间较小。工作途径单一,只能实现极少数的工作点传递。其中使用最广泛的并联分拣机器人是 Delta 机器人<sup>[8-9]</sup>,通过闭环平行四边形结构增加力臂,但由于拓扑机构使得整体结构较为复杂,驱动角受到的约束较大,由于只有三自由度,限制了其绕着水平线的转动,故在装配分拣时机构始终垂直于流水线。文中提出 2-RPU/2-SPU 并联机构则会实现单对多的工作点传输,极大地提高工作效率,并且此机构具有结构简单,受到的约束力少,机构斜置时也可以正常工作等优点,在物品分拣方面可以说是非常适用。

### 1 2-RPU/2-SPU 并联机构构型以及坐标系的建立

2-RPU/2-SPU 并联机构由 1 个静平台、1 个动平台和 4 条支链(2 条 RPU 支链和 2 条 SPU 支链)组成。支链中的 R 代表转动副, P 代表移动副, U 代表万向铰, S 代表球面副。2 条 RPU 支链的 R 副与静平台相连, U 副与动平台相连, 2 条 SPU 支链的 S 副与静平台相连, U 副与动平台相连。静平台和动平台均为正四边形,其边长分别为  $R$ 、 $r$ 。

建立固连于静平台的静坐标系  $O-x_b y_b z_b$ , 其坐标原点位于静平台的几何中心  $O$ ,  $x_b$  轴通过  $B_1 B_4$  的中点,与转动副的轴线平行,  $y_b$  轴通过  $B_1 B_3$  的中点,  $z_b$

轴垂直于静平台竖直向上;建立固连于动平台上的动坐标系  $P-x_a y_a z_a$ , 其坐标原点位于动平台的几何中心  $P$ ,  $x_a$  轴通过  $A_1 A_4$  的中点,  $y_a$  轴通过  $A_1 A_3$  的中点,  $z_a$  轴垂直于动平台向外。

### 2 2-RPU/2-SPU 并联机构的运动性能分析

基于螺旋理论对 2-RPU/2-SPU 并联机构的自由度进行分析,就是对此机构进行分解,再对各个支链进行分析。首先用  $\mathcal{S}_1$  对支链 RPS ( $A_1 B_1$  杆) 进行运动螺旋表示,建立坐标系  $B_1-x_1 y_1 z_1$ , 见图 1, 得出如下的螺旋系:

$$\mathcal{S}_1 = \begin{cases} \mathcal{S}_{11} = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{12} = (0, 0, 0; 0, 0, c_{21}) \\ \mathcal{S}_{13} = (1, 0, 0; 0, b_{32}, 0) \\ \mathcal{S}_{14} = (0, 1, 0; a_{41}, 0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

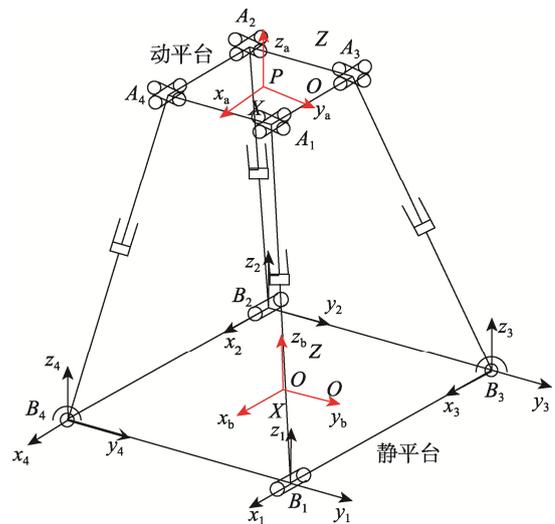


图 1 2-RPU/2-SPU 并联机构及坐标系  
Fig.1 2-RPU/2-SPU parallel mechanism and coordinate system

可以看出,支链 RPS 的运动螺旋系  $r(\mathcal{S}_1) = 2$ , 此时该支链共受到 2 个运动约束,根据运动螺旋与约束螺旋互易积为 0,对  $\mathcal{S}_1$  求反螺旋,可以得出:

$$\mathcal{S}_1^r = \begin{cases} \mathcal{S}_{11}^r = (0, 0, 0; 0, 0, 1) \\ \mathcal{S}_{12}^r = (1, 0, 0; 0, -a_{41}, 0) \end{cases} \quad (2)$$

同理,对 SPU 支链 ( $A_3 B_3$  杆) 进行螺旋理论分析,其运动螺旋系用  $\mathcal{S}_3$  来表示:

$$\mathcal{S}_3 = \begin{cases} \mathcal{S}_{31} = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{32} = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{33} = (0, 0, 1; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{34} = (0, 0, 0; 0, 0, c_{43}) \\ \mathcal{S}_{35} = (0, 1, 0; a_{51}, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{36} = (1, 0, 0; 0, b_{62}, 0) \end{cases} \quad (3)$$

对杆  $A_3B_3$  求反螺旋, 可得:

$$\mathcal{S}_3 = (0, 0, 0; 0, 0, 0) \tag{4}$$

整合式 (2) 和式 (4), 求反螺旋, 可得整个机构的运动螺旋系, 用  $\mathcal{S}$  表示:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathcal{S}_1 = (0, 0, 0; 0, 1, 0) \\ \mathcal{S}_2 = (0, 0, 0; 0, 0, 1) \\ \mathcal{S}_3 = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_4 = (0, 1, 0; a_{41}, 0, 0) \end{cases} \tag{5}$$

由式 (5) 可得  $r(\mathcal{S}) = 4$ , 即此机构空间中具有 4 个自由度。

由此机构的运动螺旋可知此机构可沿  $x_a$  轴移动, 沿  $z_a$  轴移动, 沿  $x_a$  轴方向转动, 沿  $y_a$  轴方向转动。约束螺旋限制了沿  $x_a$  轴的移动和绕  $z_a$  轴的转动。

### 3 基于欧拉角转换和四元数法求 2-RPU/2-SPU 并联机构的运动逆解

求并联机构的逆解就是根据动平台的位置和姿态来反求出各个驱动的运动参数<sup>[10-12]</sup>。常用的求逆解

$$R = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha & \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \\ \sin \gamma \cos \beta & \sin \beta \sin \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \tag{9}$$

设动平台参考点  $P$  的位置矢量为:

$$\mathbf{P} = [X \ Y \ Z]^T \tag{10}$$

通过变换公式求得动平台上的各点在静坐标系下的矢量为:

$$\begin{cases} l_1 = \sqrt{\left(\frac{r}{2} \cos \beta + \frac{r}{2} \sin \beta \sin \alpha\right)^2 + \left(\frac{r}{2} \cos \alpha + Y\right)^2 + \left(-\frac{r}{2} \sin \beta + \frac{r}{2} \cos \beta \sin \alpha + Z\right)^2} \\ l_2 = \sqrt{\left(-\frac{r}{2} \cos \beta - \frac{r}{2} \sin \beta \sin \alpha\right)^2 + \left(-\frac{r}{2} \cos \alpha + Y\right)^2 + \left(\frac{r}{2} \sin \beta - \frac{r}{2} \cos \beta \sin \alpha + Z\right)^2} \\ l_3 = \sqrt{\left(-\frac{r}{2} \cos \beta + \frac{r}{2} \sin \beta \sin \alpha\right)^2 + \left(\frac{r}{2} \cos \alpha + Y\right)^2 + \left(\frac{r}{2} \sin \beta + \frac{r}{2} \cos \beta \sin \alpha + Z\right)^2} \\ l_4 = \sqrt{\left(\frac{r}{2} \cos \beta - \frac{r}{2} \sin \beta \sin \alpha\right)^2 + \left(-\frac{r}{2} \cos \alpha + Y\right)^2 + \left(-\frac{r}{2} \sin \beta - \frac{r}{2} \cos \beta \sin \alpha + Z\right)^2} \end{cases} \tag{12}$$

四元数法<sup>[14-15]</sup>在表达三维空间的旋转信息时, 具有很好的解释作用, 其表达式为:

$$\mathbf{Q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \tag{13}$$

式中:  $q_0, q_1, q_2, q_3$  为实数;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  为相互正交的单位向量。

在四元乘法运算中, 运算关系为:

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \otimes \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \otimes \mathbf{i} = \mathbf{j} \tag{14}$$

式中:  $\otimes$  在四元数法中表示乘法。

方法有闭环矢量法和 D-H 法, 当驱动加在 R 副上时使用 D-H 法, 因本机构的 4 个驱动添加在 P 副上, 故只需用闭环矢量法进行分析即可。

静平台上各点的坐标表示为:

$$\mathbf{B}_1 \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{B}_2 \begin{pmatrix} -\frac{R}{2} \\ -\frac{R}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T, \tag{6}$$
$$\mathbf{B}_3 \begin{pmatrix} -\frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{B}_4 \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \\ -\frac{R}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

动平台上各点的坐标表示为:

$$\mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} -\frac{r}{2} \\ -\frac{r}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T, \tag{7}$$
$$\mathbf{A}_3 \begin{pmatrix} -\frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{A}_4 \begin{pmatrix} \frac{r}{2} \\ -\frac{r}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

根据闭环矢量法求得各杆在静坐标系下的矢量表达式为:

$$\mathbf{B}_i \mathbf{A}_i = \mathbf{O} \mathbf{A}_i - \mathbf{O} \mathbf{B}_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{8}$$

动平台位姿通过 X-Y-Z 型欧拉角<sup>[13]</sup>表示,  $\mathbf{R}$  为 X-Y-Z 型欧拉角的姿态转换矩阵, 设  $l_i$  表示杆  $A_iB_i$  的长度, 设动平台的各个位姿参数为  $x_a, y_a, z_a, \alpha, \beta, \gamma$ , 则转换矩阵为:

$${}^O \mathbf{A}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_i + \mathbf{P} \tag{11}$$

通过螺旋理论已知机构存在的约束, 则  $\gamma = 0, X = 0$ , 则  $\sin \gamma = 0, \cos \gamma = 1$ 。求得各支链的运动学逆解方程为:

将并联机构转动的四元数转化为规范化四元数, 即可变为式 (15) 所示的矩阵形式。

$$\mathbf{C}_O^P = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

式中:  $\mathbf{C}_O^P$  为动坐标系  $P$  相对于静坐标系  $O$  的旋

转矩阵。

根据空间几何关系可知:

$$C_o^p = R \tag{16}$$

式中:  $R$  的表达式为式 (9)。

即可求出如下的对应关系:

$$\begin{cases} \cos \beta \cos \gamma = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \\ \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha = 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) \\ \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha = 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ \sin \gamma \cos \beta = 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) \\ \sin \beta \sin \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \cos \alpha = q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \tag{17} \\ \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha = 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ -\sin \beta = 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ \cos \beta \sin \alpha = 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ \cos \alpha \cos \beta = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{cases}$$

通过化简得  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  的表达式为:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan \frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \\ \arcsin [2(q_0 q_2 - q_1 q_3)] \\ \arctan \frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \end{bmatrix} \tag{18}$$

### 4 2-RPU/2-SPU 并联机构工作空间分析

根据机构的特殊形式, 假设静平台半径为 50 mm, 动平台半径为 30 mm, 即  $R=50$  mm,  $r=30$  mm, 4 条支

链初始长度都相等,  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 100$  mm, 各杆的伸长量为 80 mm, 即最长杆可达 180 mm, 将求出的并联机构逆解方程导入 Matlab 中, 可得到该机构动平台几何中心能到达的点的极限范围, 见图 2。

可以发现, 此机构的工作范围比较大, 并且工作空间在各个坐标平面上的投影形状基本对称, 而且工作空间连续, 没有空洞, 说明此机构能够在工作空间范围内平稳运行, 无奇异性<sup>[16]</sup>, 运动性能良好。

### 5 2-RPU/2-SPU 并联机构的运动学分析

建立 2-RPU/2-SPU 并联机构的虚拟样机模型, 将建立好的 SolidWorks 模型转换格式, 代入 Adams 软件中, 设置其约束及驱动力, 将驱动力施加到支链的 4 个移动副中, 见图 3。观察动平台质心运动参数的变化规律, 见图 4。

从图 4 可以看出, 2-RPU/2-SPU 并联机构动平台质心的位移、速度、加速度曲线变化较平稳, 无断点, 适用于自动分拣装置。

### 6 2-RPU/2-SPU 自动分拣机构

由于快递物流线上的快递件大小不同, 其在流水线上的摆放规律更是杂乱无章。针对适用的快递物流线上的分拣机, 有精度、速度以及稳定性等方面的要求。通过对 2-RPU/2-SPU 并联机构进行分析, 可观察其工作空间较大、控制较灵活、动态性偏差小。

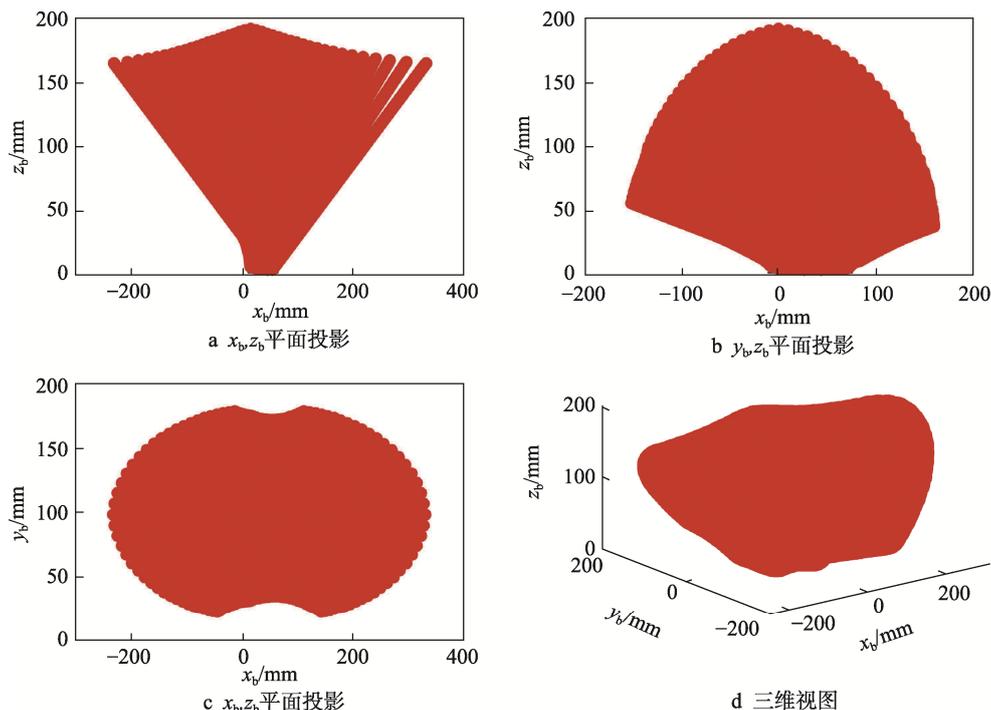


图 2 2-RPU/2-SPU 并联机构的可达工作空间  
Fig.2 Reachable workspace of 2-RPU/2-SPU parallel mechanism

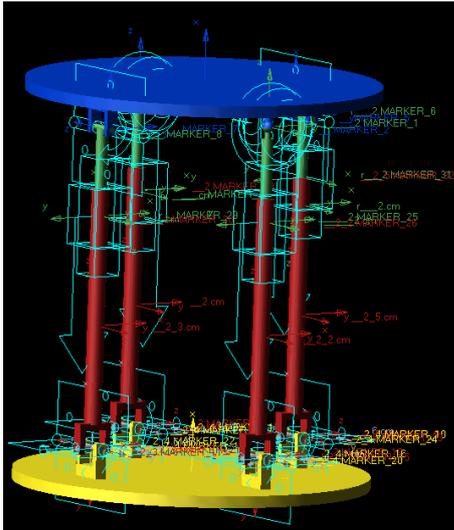


图3 2-RPU/2-SPU 并联机构的虚拟样机  
Fig.3 Virtual prototype of 2-RPU/2-SPU parallel mechanism

由于采用并联机构形式，此机构无累积偏差，并且并联机构刚度大、结构稳定、承载能力大。

基于 2-RPU/2-SPU 并联机构的自动分拣装置，可配置于快递物流线上用于物品的分拣。将此机构与视觉传感技术相结合即可实现流水线上物品的分拣，可以实现精准度高、响应速度快的分拣，节约了人工成本。通过 SolidWorks 建模后，根据其不受  $x_a$  轴移动的约束力，将此机构配置在快递流水线上，接着对此机构进行仿真处理，仿真过程发现此机构能够将物品置于分拣箱内，见图 5a。

鉴于此机构在水平面内沿  $x_a$  轴方向的投影较大，故可实现单机构对多条流水线上的同时分拣，见图 5b。当分拣箱垂直于流水线时，只需要将机构斜置在流水线和分拣箱之间即可实现抓取与摆放的动作，见图 5c。

2-RPU/2-SPU 自动分拣机构与经典的 Delta 分拣机构相比，当 Delta 分拣机构与 2-RPU/2-SPU 分拣机构所给定的杆长参数相等时，位移变化曲线平稳且范围较大，速度可调节范围较大，因此，2-RPU/2-SPU 自动分拣机构更适用于物流线货物较多，需要快速、精准分拣的情形。

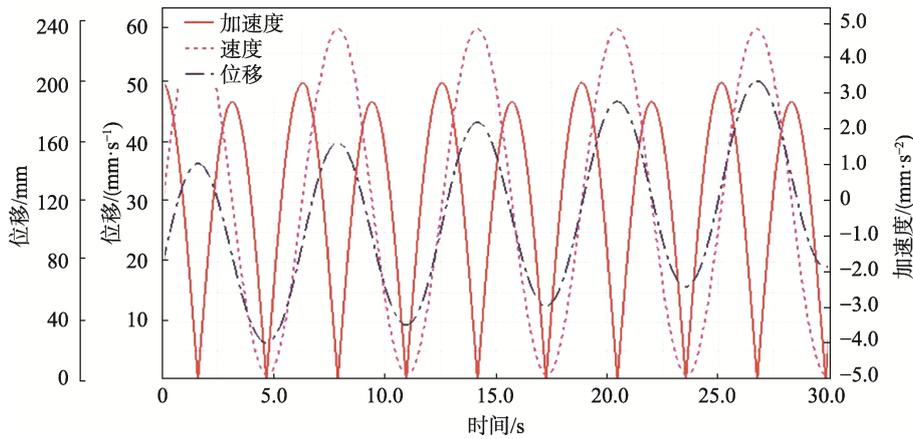
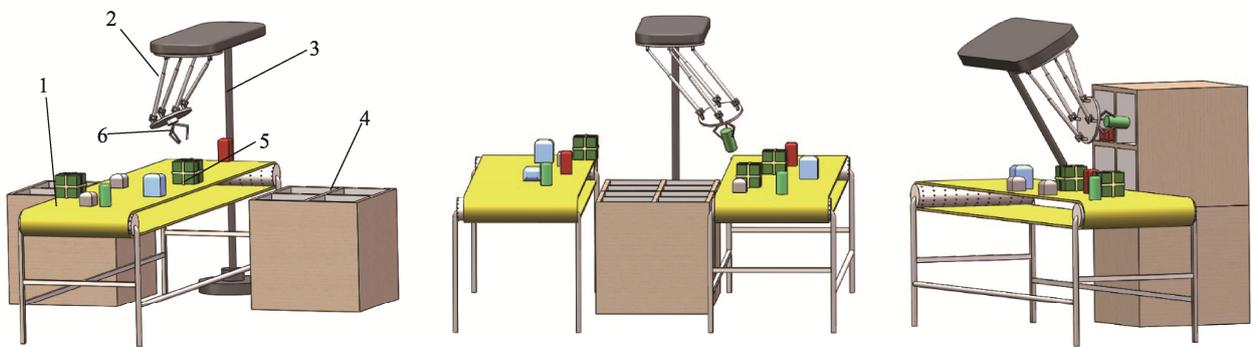


图4 动平台质心参数  
Fig.4 Centroid parameters of moving platform



a 单机构对单条流水线      b 单机构对多条流水线      c 机构斜置时应用场景

1.传送带；2.并联机构；3.机架；4.分拣集装箱；5.分拣货物；6.机械爪。

图5 分拣装置  
Fig.5 Sorting device

## 7 结语

2-RPU/2-SPU 并联机构具有沿  $y_a$  轴移动, 沿  $z_a$  轴移动, 绕  $x_a$  轴转动, 绕  $y_a$  轴转动 4 个自由度。利用闭环矢量法求得该机构的位置逆解及各支链间的相互约束关系。利用极限位置探索法求出该机构的工作空间, 通过对工作空间的分析发现, 工作空间基本呈现对称情况, 空间性能良好。相较于传统的并联机构分拣机, 此机构具有工作范围较大, 驱动力容易添加等优点, 只需要给各条支链移动副添加用移动驱动即可达到各个位置和姿态, 实现了货物大批量的快速、精准分拣。

### 参考文献:

- [1] 胡健, 宋胜涛, 李瑞琴, 等. 2-RPU/UPS 并联机构自由度和位置分析[J]. 包装工程, 2021, 42(7): 214-219.  
HU Jian, SONG Sheng-tao, LI Rui-qin, et al. Degree of Freedom and Position Analysis of 2-RPU/UPS Parallel Mechanism[J]. Packaging Engineering, 2021, 42(7): 214-219.
- [2] 米文博, 马春生, 李瑞琴, 等. 应用于药品包装生产线的 2-UPR/RSPR 并联机构的工作空间分析[J]. 包装工程, 2021, 42(3): 171-176.  
MI Wen-bo, MA Chun-sheng, LI Rui-qin, et al. Workspace Analysis of 2-UPR/RSPR Parallel Mechanism Applied to Pharmaceutical Packaging Production Line[J]. Packaging Engineering, 2021, 42(3): 171-176.
- [3] MURALIDHARAN V, BOSE A, CHATRA K, et al. Methods for Dimensional Design of Parallel Manipulators for Optimal Dynamic Performance Over a Given Safe Working Zone[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 147(C): 1-33.
- [4] PENG Bin-bin, ZHU Shuai, KHAJEPOUR A, et al. Kinematics and Orientation Capability of a Family of 3-DOF Parallel Mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 142: 1-20.
- [5] 贾竣臣, 薄瑞峰, 郭鑫鑫, 等. 一种 2T2R 并联机构的位置逆解和工作空间分析[J]. 机械传动, 2021, 45(6): 22-27.  
JIA Jun-chen, BO Rui-feng, GUO Xin-xin, et al. Inverse Position Solution and Workspace Analysis of a 2T2R Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2021, 45(6): 22-27.
- [6] GUO Sheng, WANG Cong-zhe, QU Hai-bo, et al. A Novel 4-RRCR Parallel Mechanism Based on Screw Theory and Its Kinematics Analysis[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2013, 227(9): 2039-2048.
- [7] SANGVERAPHUNSIRI V, CHOOPRASIRD K. Dynamics and Control of a 5-DOF Manipulator Based on an H-4 Parallel Mechanism[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2011, 52(1-4): 343-364.
- [8] 李家宇, 沈惠平, 孟庆梅, 等. 一种 Delta 变形机构及其基于工作空间分析的尺度设计[J]. 机械设计, 2018, 35(7): 92-98.  
LI Jia-yu, SHEN Hui-ping, MENG Qing-mei, et al. A Delta-Derived Mechanism and Its Scale Design Based on Working Space Analysis[J]. Journal of Machine Design, 2018, 35(7): 92-98.
- [9] 乔文刚, 王磊, 秦天碧. 三自由度 Delta 机器人的奇异性分析及空间研究[J]. 机床与液压, 2018, 46(9): 61-64.  
QIAO Wen-gang, WANG Lei, QIN Tian-bi. Singularity Analysis and Space Research of 3-DOF Delta Robot [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2018, 46(9): 61-64.
- [10] 石志新, 叶梅燕, 罗玉峰, 等. 3T1R 并联机构结构设计及位置分析[J]. 农业机械学报, 2016, 47(8): 364-369.  
SHI Zhi-xin, YE Mei-yan, LUO Yu-feng, et al. Structure Design and Displacement Analysis of 3T1R Parallel Mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(8): 364-369.
- [11] OLARU A, OLARU S, NICULAE M. Proper Assisted Research Method Solving of the Robots Inverse Kinematics Problem[J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 555: 134-146.
- [12] FANG Hai-rong, LIU Peng-fei, YANG Hui, et al. Design and Analysis of a Novel 2T2R Parallel Mechanism with the Closed-Loop Limbs[J]. International Journal of Automation and Computing, 2021, 18(4): 654-666.
- [13] 黄真, 李艳文, 高峰. 空间运动构件姿态的欧拉角表示[J]. 燕山大学学报, 2002, 26(3): 189-192.  
HUANG Zhen, LI Yan-wen, GAO Feng. The Expression of the Orientation of a Spatial Moving Unit by Euler Angle[J]. Journal of Yanshan University, 2002, 26(3): 189-192.
- [14] 闫鑫, 马丽萍, 王晓华, 等. 基于倍四元数的缝纫机器人运动学分析[J]. 机械传动, 2020, 44(10): 68-73.  
YAN Xin, MA Li-ping, WANG Xiao-hua, et al. Kinematics Analysis of Sewing Robot Based on Double Quaternion[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(10): 68-73.
- [15] 赵德胜, 吴荣军, 张雪. 基于四元数的 6-UPS 机构奇异性分析[J]. 机械传动, 2015, 39(2): 72-76.  
ZHAO De-sheng, WU Rong-jun, ZHANG Xue. Singularity Analysis of 6-UPS Mechanism Based on Quaternion[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2015, 39(2): 72-76.
- [16] REZAEI A, AKBARZADEH A. Study on Jacobian, Singularity and Kinematics Sensitivity of the FUM 3-PSP Parallel Manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 86: 211-234.