

非均匀张力作用下多层膜结构动力稳定性研究

邵明月¹, 张森¹, 武吉梅¹, 庆佳娟², 王静²

(1. 西安理工大学 印刷包装与数字媒体学院, 西安 710054;

2. 西安理工大学 机械与精密仪器学院, 西安 710048)

摘要: **目的** 电子膜要求涂层均匀、套印精度高, 文中旨在研究不同参数对柔性电子多层膜动态稳定性的影响, 为柔性电子膜的稳定传输提供理论指导。**方法** 应用 Hamilton 原理建立运动多层膜结构的振动微分方程, 采用隐式龙格库塔法求解离散得到的状态方程, 根据 Floquet 理论计算系统 $|\lambda_k|=1$ 时对应的 Ω 和 c_1 。**结果** 在对边简支对边固支边界条件下, 运动多层膜稳定区域更大。此外, 减小平均速度、张力比、非均匀张力系数, 增大长宽比, 可以提高运动多层膜的稳定性, 其中平均速度变化的影响最为显著。**结论** 通过建立实际生产中运动柔性电子多层膜数学模型, 得到了不同参数对运动多层膜动态稳定性影响规律, 研究结果为柔性电子多层膜稳定传输, 提高涂层均匀性、叠印精度提供了理论依据。

关键词: 非均匀张力; 变速度; 多层膜结构; 动态稳定性

中图分类号: TB486 文献标识码: A 文章编号: 1001-3563(2022)15-0195-08

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2022.15.022

Dynamic Stability of Multilayer Film Structure under Non-uniform Tension

SHAO Ming-yue¹, ZHANG Miao¹, WU Ji-mei¹, QING Jia-juan², WANG Jing²

(1. School of Printing Packaging Engineering and Digital Media Technology, Xi'an University of Technology,

Xi'an 710054, China; 2. School of Mechanical and Precision Instrument Engineering,

Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

ABSTRACT: The work aims to study the effects of different parameters on the dynamic stability of flexible electronic multilayer film considering that electronic film requires uniform coating and high overprint lamination accuracy, so as to provide theoretical guidance for the stable transmission of flexible electronic film. The vibration differential equation of the moving multilayer film structure was established by Hamilton's principle, the discrete equation of state was solved by the implicit Runge-Kutta method, and the corresponding Ω and c_1 of the system $|\lambda_k|=1$ were calculated according to the Floquet theory. The stable region of the moving multilayer film was larger when the film was simply supported on opposite sides and fixed on opposite sides. In addition, reducing the average speed, tension ratio, non-uniform tension coefficient, and increasing the aspect ratio could improve the stability of the moving multilayer film, and the effect of the average speed change was the most significant. Through the establishment of the mathematical model of the moving flexible electronic multilayer film in actual production, the effect law of different parameters on the dynamic stability of the moving multilayer film is obtained. The research results provide a theoretical basis for stable transmission of flexible electronic multilayer film and improvement of coating uniformity and overprint lamination accuracy.

KEY WORDS: non-uniform tension; variable speed; multilayer film structure; dynamic stability

收稿日期: 2021-12-05

基金项目: 国家自然科学基金 (52075435); 陕西省自然科学基金 (2021JQ-480); 陕西省教育厅自然科学基金专项项目 (21JK0805)

作者简介: 邵明月 (1989—), 女, 博士, 西安理工大学讲师, 主要研究方向为机械结构动力学。

柔性电子制造通过卷到卷 (R2R) 方式可以有效控制生产成本、简化生产工艺、有效避免材料浪费, 已经成为 RFID、薄膜太阳能电池、OLED、印刷电子等领域理想制造技术。从柔性电子制造的生产过程和功能薄膜的制备工艺可以看出, 其具有明显的多层化特点。其多层化、多材料特性, 常常表现出异于一般结构的复杂力学行为^[1], 在生产过程中多层膜结构产生的振动对涂布的均匀性、精准封装等会造成严重影响, 降低产品质量。

在 R2R 柔性电子制造中, 料带并不是严格匀速运动的。在涂布、干燥、输送等过程中, 料带进行高温镀层时质量的增加、干燥时受到烘箱气体的干扰、收放卷时料卷直径的变化和导向辊转动时的扰动, 薄膜的速度通常是变化的, 微小的速度扰动都会对印刷电子薄膜产品的质量产生很大的影响。由于导向辊安装不平行也会导致薄膜两端产生非均匀张力, 导致涂布层粗糙度发生变化, 引起褶皱。因此研究多层膜结构在非均匀拉力作用下变速运动振动特性十分有必要。近年来已经有大量关于轴向运动层合板横向振动及稳定性的研究。赵飞等^[2]采用分层理论对复合材料层合板的固有频率和振型进行理论计算。刘金建等^[3]利用多尺度法分析了变速运动板的失稳规律。陈立群等^[4]用解析和数值方法同时研究了面内变速运动粘弹性板的横向非线性振动, 考察了面内运动平均速度、面内运动速度涨落、黏性系数等对稳态响应的影响。Yang 等^[5]采用多尺度法得到了轴向加速复合材料板的稳定边界。Lu 等^[6]采用直接多尺度方法, 研究了轴向移动的石墨烯增强层合板的动态稳定性。刘金堂等^[7]利用 Galerkin 法与平均法研究了由共振引发的失稳区域。Hatami^[8]利用经典板理论研究了平面内力作用下轴向移动对称层合板的自由振动问题。Aydogdu^[9]利用高阶剪切变形层合板理论研究了复合材料动力特性。Marynowski 等^[10]研究了温度对轴向移动多尺度复合材料板自由振动和临界运输速度的影响。Han 等^[11]用分析薄层结构振动的里兹方法研究了对称叠层斜板的自由振动。关于轴向运动薄膜横向振动及其参数振动也有许多研究成果。侯志勇等^[12]利用达朗贝尔原理建立轴向运动薄膜横向振动微分方程, 并用微分求积法验证解析解, 求出了轴向运动薄膜的稳定区间。武吉梅^[13]根据 Floquet 理论确定了纸带的动力不稳定区域和稳定区域。邵明月^[14]研究了非均匀张力下变速膜的振动特性和稳定性。Wu 等^[15]研究了系统参数对变速膜振动特性和稳定性的影响。卢瑶等^[16]研究了变速运动粘弹性硬质薄膜的稳定性, 分析了不同参数对运动薄膜稳定区域的影响。

以上研究少见对计及弯曲刚度非均匀拉力下变速多层膜结构的振动分析。文中综合考虑了弯曲刚度及非均匀张力对变速复合膜结构运动稳定区域的影响, 根据 Floquet 理论, 得到了运动膜的动态稳定区

间并绘制关系曲线分析系统参数对稳定区域的作用规律。

1 动力学模型及振动微分方程的建立

图 1 所示为轴向变速运动多层膜结构理论模型。多层膜以速度 v_x 沿 x 方向移动, 长、宽、厚为 a 、 b 、 h , 其中每一层的厚度为 h_1-h_2, h_2-h_3, \dots , T_x 、 T_y 为单位长度受到的张力, 每一层的密度为 ρ_k , k 为层数。膜的横向振动为 z 方向, $w_0(x, y, t)$ 为横向振动位移。图 2 为多层膜结构的微观示意图。

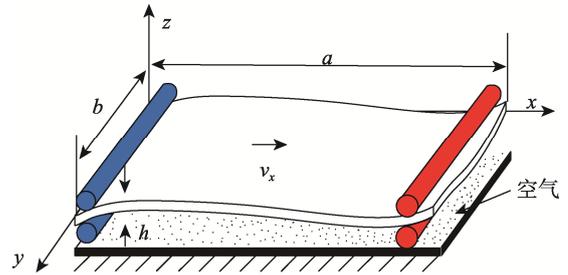


图 1 运动多层膜结构动力学模型
Fig.1 Dynamic model of moving multilayer film structure

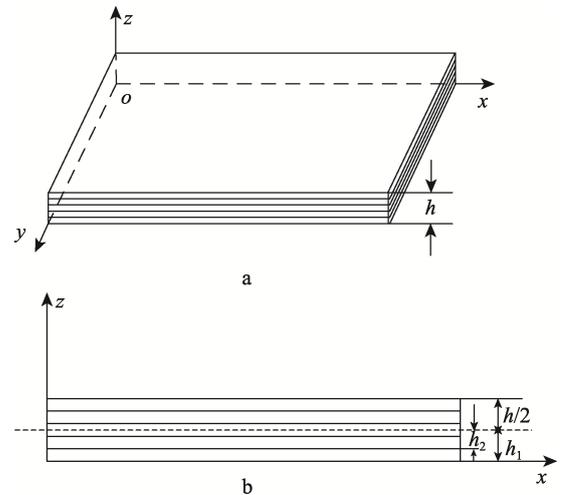


图 2 多层膜微观结构理论模型示意图
Fig.2 Schematic diagram of theoretical model of multilayer film microstructure

假设多层膜结构的速度为匀速运动与一个微小正弦变化速度之和, 如图 3 所示, 数学表达式为 $v_x = v_0 + v_1 \sin \bar{\Omega} t$; 受到的张力如图 4 所示, 其数学表达式为 $T_x = T_0 \left(1 + \beta \frac{y}{b} \right)$ 。

假设多层膜结构 x 方向的弹性模量为 E_1 , y 方向的弹性模量为 E_2 , xOy 平面内的剪切弹性模量为 G_{12} , x 方向与 y 方向上的泊松比为 ν_{12} 、 ν_{21} 。中面位移 u_0 和 v_0 忽略不计, 膜内任意一点的应变可以表示为:

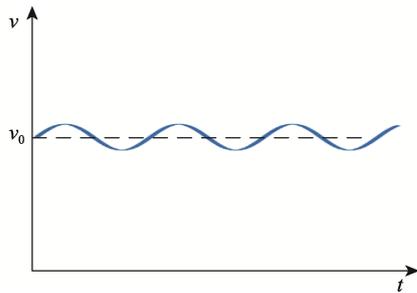


图 3 速度变化曲线
Fig.3 Speed curve

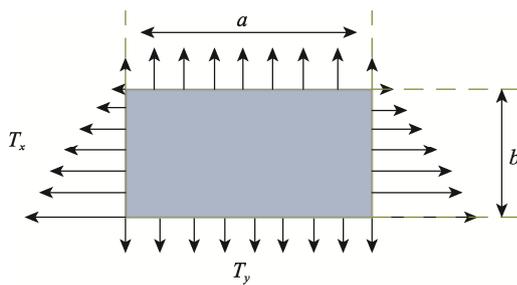


图 4 非均匀张力作用示意图
Fig.4 Schematic diagram of non-uniform tension

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

当主轴方向与所设平面的坐标系之间有夹角 θ 时, 根据参考坐标系下单层膜的应力应变关系式, 可求得多层膜结构中第 k 层的应力, 即:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中: $\overline{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k$, $\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k)$, $\overline{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k$, $\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k$, $\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k$, $\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k)$, $Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$, $Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$, $Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$, $Q_{66} = G_{12}$.

式中: k 为多层膜结构的第 k 层; θ_k 为薄板第 k 层的主纤维方向与所设平面坐标系下 x 方向的夹角。

多层膜结构运动时横向振动方向上的速度为^[12]:

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t} + v \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \quad (3)$$

根据 Hamilton 原理建立多层膜结构的能量方程式:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - W - U) dt = 0 \quad (4)$$

其中:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dv$$

$$U = \frac{1}{2} \iint_A \left[T_0 \left(1 + \beta \frac{y}{b} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + T_y \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$T = \frac{\rho h}{2} \iint_A \left[v^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} + v \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy$$

$$v = v_0 + v_1 \sin \bar{\Omega} t, \rho h = \sum_{k=1}^N \rho_k h_k$$

对式 (4) 进行变分运算得振动微分方程为:

$$\begin{aligned} I_0 \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \bar{\Omega} v_1 \cos \bar{\Omega} t \frac{\partial w_0}{\partial x} + 2(v_0 + v_1 \sin \bar{\Omega} t) \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \bar{\Omega} v_1 \cos \bar{\Omega} t \frac{\partial w_0}{\partial x} + 2(v_0 + v_1 \sin \bar{\Omega} t) \right] + \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + (v_0 + v_1 \sin \bar{\Omega} t)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} +$$

$$4D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^3} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} -$$

$$T_0 \left(1 + \beta \frac{y}{b} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - T_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0$$

式中: $I_0 = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho_k dz$, $D_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} z^2 \overline{Q}_{ij}^k dz$ ($i, j = 1, 2, 6$)。

引入无量纲量:

$$\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, w = \frac{w_0}{h}, r = \frac{a}{b}, \tau = \frac{t}{a} \sqrt{\frac{T_0}{I_0}}, c_0 =$$

$$v_0 \sqrt{\frac{I_0}{T_0}}, c_1 = v_1 \sqrt{\frac{I_0}{T_0}}, \Omega = \bar{\Omega} a \sqrt{\frac{I_0}{T_0}}, F_1 = \frac{D_{11}}{a^2 T_0}, F_2 =$$

$$\frac{D_{22}}{b^2 T_0}, F_3 = \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{b^2 T_0}, \lambda = \frac{T_y}{T_0}$$

将式 (6) 代入式 (5) 得无量纲平衡方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \Omega c_1 \cos \Omega \tau \frac{\partial w}{\partial \xi} + 2(c_0 + c_1 \sin \Omega \tau) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} - \\ & (1 + \beta \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \lambda r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \\ & (c_0^2 + 2c_0 c_1 \sin \Omega \tau + c_1^2 \sin^2 \Omega \tau) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + F_1 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \\ & F_2 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + F_3 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

2 应用微分求积法建立复特征方程

多方程的微分求积形式为:

$$\begin{aligned} & \ddot{w}_{ij} + 2(c_0 + c_1 \sin \Omega \tau) \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[1]} \dot{w}_{ij} + \Omega c_1 \cos \Omega \tau \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[1]} w_{ij} + \\ & \left(c_0^2 + 2c_0 c_1 \sin \Omega \tau + \frac{1}{2} c_1^2 - \frac{1}{2} c_1^2 \cos 2\Omega \tau \right) \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[2]} w_{ij} + \\ & F_1 \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[4]} w_{ij} + F_2 \sum_{m=1}^M A_{jm}^{[4]} w_{ij} + F_3 \sum_{i=1}^N A_{ik}^{[2]} \sum_{m=1}^M B_{jm}^{[2]} w_{ij} - \\ & (1 + \beta \eta) \sum_{k=1}^N A_{ik}^{[2]} w_{ij} - \lambda r^2 \sum_{m=1}^M B_{jm}^{[2]} w_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

四边简支边界条件的微分求积形式为:

$$\begin{cases} w_{1j} = w_{Nj} = w_{i1} = w_{iN} = 0 & i, j = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} w_{kj} = 0 & i = 1, N; j = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{k=1}^N A_{jk}^{(2)} w_{ik} = 0 & j = 1, N; i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (9)$$

对边简支另一对边固支的微分求积形式为:

$$\begin{cases} w_{1j} = w_{Nj} = w_{i1} = w_{iN} = 0 & i, j = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} w_{kj} = 0 & i = 2, N-1; j = 2, 3, \dots, N-2 \\ \sum_{k=1}^N A_{jk}^{(2)} w_{ik} = 0 & j = 1, N; i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (10)$$

将方程(8)和边界条件(9)、(10)合并得:

$$R\ddot{W} + C\dot{W} + KW = 0 \quad (11)$$

令 $y = [W \ \dot{W}]^T$, 代入式(11)得:

$$\dot{y} = G(\tau)y \quad (12)$$

式中 $G(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -R^{-1}K & -R^{-1}C \end{bmatrix}$, I 为 N 阶单位矩

阵, $K(\tau+T) = K(\tau)$, 正弦变化速度周期为 T , $K(\tau)$ 的周期也为 T 。

3 微分方程组的求解

应用二阶四级隐式龙格库塔法求解该运动微分方程组。求解公式为:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = A \left(y_i + \frac{h}{4}k_1 + \frac{3+2\sqrt{3}}{12}hk_2 \right) + B \\ k_2 = A \left(y_i + \frac{h}{4}k_2 + \frac{3-2\sqrt{3}}{12}hk_1 \right) + B \end{cases} \quad (13)$$

令 $k = [k_1 \ k_2]^T$, 将这 2 个关于 k_1 和 k_2 的方程组显式化为:

$$k = (I - c)^{-1} d \quad (14)$$

$$c = \begin{bmatrix} \frac{h}{4}A & \frac{3+2\sqrt{3}}{12}hA \\ \frac{3-2\sqrt{3}}{12}hA & \frac{h}{4}A \end{bmatrix}, c \in R^{2m \times 2m};$$

$$d = \begin{bmatrix} Ay_i + B \\ Ay_i + B \end{bmatrix}, d \in R^{2m}; k \in R^{2m}$$

根据式(12), 取式 $\frac{dy}{dt} = Ay + B, t \in [t_0, t_1]$, A 和 B 分别为:

$$A = G(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -R^{-1}K & -R^{-1}C \end{bmatrix} \quad (15)$$

$B = 0$
计算时取节点数 $N_x = N_y = 12$, 适当的步长 h , 利用 Matlab 程序即可求得 y 值。

Floquet 理论判定系统稳定区域: 当 $|\lambda_k| < 1$ 时, 系统处于稳定状态; $|\lambda_k| > 1$ 时, 则系统处于不稳定状态; $|\lambda_k| = 1$ 时为临界状态, λ_k 为动力稳定性方程的特征值^[14]。

4 数值计算与分析

下面以一种功能薄膜进行数值分析, 材料属性见表 1。

为了说明计算的准确性, 令 $v = 0$ 、 $T_x = T_y = 0$, 式(5)退化为多层膜结构的横向自由振动微分方程, 计算四边简支边界条件下, 长宽比 $r = 1$ 的三层膜结构的前 3 阶固有频率, 并与文献[2]的精确解进行对比, 结果见表 2。

令 $N = 1$ 、 $v = 0$ 、 $T_x = T_y = 0$, 式(5)退化为单层膜结构的横向自由振动微分方程, 计算对边简支对边固支条件下, 长宽比 $r = 1$ 的单层膜结构的前 3 阶固有频率, 并与文献[17]的精确解进行对比, 结果见表 3。

令 $N = 1$ 、 $v_1 = 0$ 、 $\beta = 0$, 忽略多层膜结构的抗弯刚度, 式(5)退化为:

$$\begin{aligned} & I_0 \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + v_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] - T_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \\ & T_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

表 1 功能膜各层材料属性
Tab.1 Material properties of each layer of functional film

层数	材料	E_1/GPa	E_2/GPa	G_{12}/GPa	ν	$\rho / (\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	h/mm
1	Cu/环氧膜	119	46.7	12.8	0.326	8 500	0.2
2	PI 薄膜	4.6	2.7	1.57	0.34	1 440	0.1
3	T300 石墨/环氧膜	45	12.9	4.6	0.28	1 760	0.1
4	T300 石墨/环氧膜	45	12.9	4.6	0.28	1 760	0.1
5	T300 石墨/环氧膜	45	12.9	4.6	0.28	1 760	0.1
6	T300 石墨/环氧膜	45	12.9	4.6	0.28	1 760	0.1
7	PI 薄膜	4.6	2.7	1.57	0.34	1 440	0.1

表 2 三层铺设四边简支复合膜前 3 阶固有频率
文中解与解析解的对比

Tab.2 Comparison between the solution and the analytical solution of the first three order natural frequencies of the three-layer simply supported composite film

频率	文中解	文献[2]精确解
1 阶	15.161	15.171
2 阶	33.190	33.248
3 阶	44.381	44.387

表 3 单层膜前 3 阶固有频率本文解与解析解的对比

Tab.3 Comparison between the solution and the analytical solution of the first three order natural frequencies of monolayers

频率	文中解	文献[17]精确解
1 阶	28.9552	28.95
2 阶	54.7467	54.74
3 阶	69.3394	69.33

方程 (16) 与文献[12]轴向运动薄膜的横向振动微分方程一致。

由表 2、表 3 和式 (16) 可知, 式 (5) 计算非均匀张力作用下多层膜结构轴向运动横向振动微分方程正确, 并且应用微分求积法计算不同边界条件下多层膜结构的振动频率与文献解析解均有很好的 consistency, 表明该方法研究多层膜结构动力稳定性是可行的。

4.1 四边简支边界计算分析

当 $r=1$ 、 $\lambda=1$ 、 $\beta=0.5$, 平均速度分别为 $c_0=0.7$ 和 $c_0=1$ 时, 运动多层膜的平均速度与稳定区域的关系见图 5。

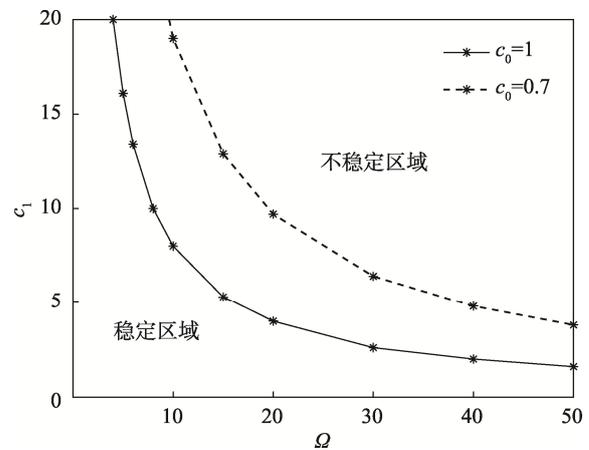


图 5 平均速度与稳定区域的关系

Fig.5 Relationship between average speed and stable region

图 5 中的曲线由特征值 $|\lambda_k|=1$ 时的 c_1 和 Ω 的值拟合而成, 以表明速度扰动对运动薄膜稳定传输的作用规律。 c_1 为无量纲运动速度涨落幅值, Ω 为无量纲周期脉动频率, 曲线的上方为多层薄膜运动的不稳定区域, 下方为多层薄膜运动稳定区域。当 $c_0=1$, 随着 Ω 的增大, c_1 逐渐下降, 曲线越来越靠近下方, 其稳定区域减小, 说明当速度变化越快时, 薄膜越不稳定。当 $c_0=0.7$ 时, 曲线更靠近右上方, 稳定区域相对于 $c_0=1$ 更大, 由图片中绘制的两条曲线关系可知, 当运动多层膜平均速度增大时, 稳定区域减小。

当 $r=1$ 、 $c_1=1$ 、 $\beta=0.5$, 张力比分别为 $\lambda=1$ 和 $\lambda=2$ 时, 运动多层膜的张力比与稳定区域的关系见图 6。由图 6 可知, 当运动多层膜张力比增大时, 稳定区域减小。

当 $r=1$ 、 $c_0=1$ 、 $\beta=0.5$, 张力比分别为 $r=1$ 和 $r=2$ 时, 运动多层膜的长宽比与稳定区域的关系见图 7。由图 7 可知, 当运动多层膜长宽比增大时, 稳定区域增大。

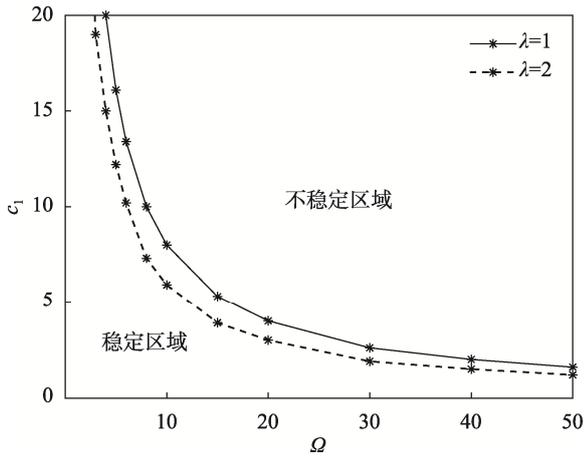


图6 张力比与稳定区域的关系
Fig.6 Relationship between tension ratio and stable region

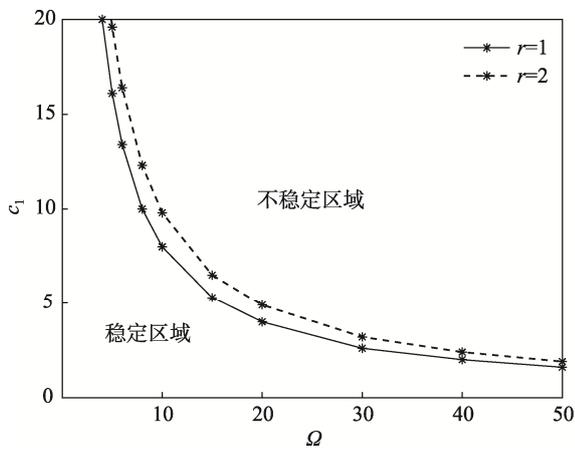


图7 长宽比与稳定区域的关系
Fig.7 Relationship between aspect ratio and stable region

当 $r=1$ 、 $\lambda=1$ 、 $c_0=1$ ，张力比分别为 $\beta=0.5$ 和 $\beta=1$ 时，运动多层膜的非均匀张力系数与稳定区域的关系见图 8。由图 8 可知，当运动多层膜非均匀张力系数增大时，稳定区域减小。

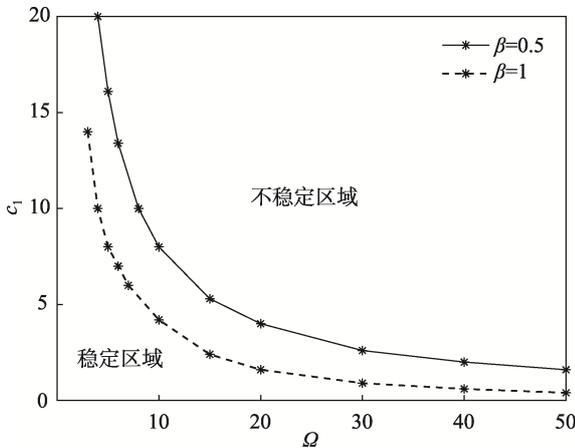


图8 非均匀张力系数与稳定区域的关系
Fig.8 Relationship between non-uniform tension coefficient and stable region

4.2 对边简支对边固支边界计算分析

当 $r=1$ 、 $\lambda=1$ 、 $\beta=0.5$ ，平均速度分别为 $c_0=0.5$ 和 $c_0=1$ 时，运动多层膜的平均速度与稳定区域的关系见图 9。由图 9 可知，当运动多层膜平均速度增大时，稳定区域减小。

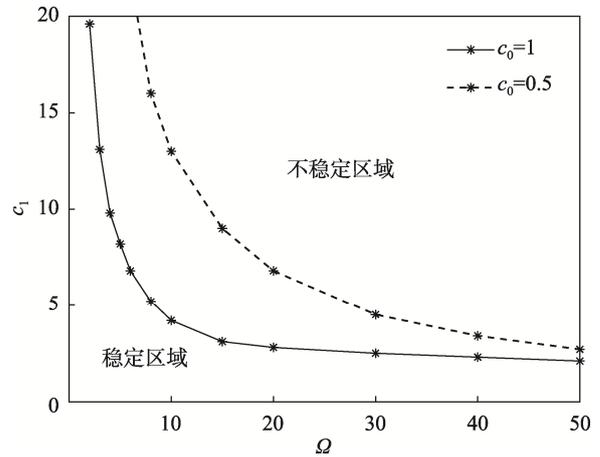


图9 平均速度与稳定区域的关系
Fig.9 Relationship between average speed and stable region

当 $r=1$ 、 $\lambda=1$ 、 $c_0=1$ ，张力比分别为 $\beta=0.5$ 和 $\beta=0.8$ 时，运动多层膜的非均匀张力系数与稳定区域的关系见图 10。由图 10 可知，当运动多层膜非均匀张力系数增大时，稳定区域减小。

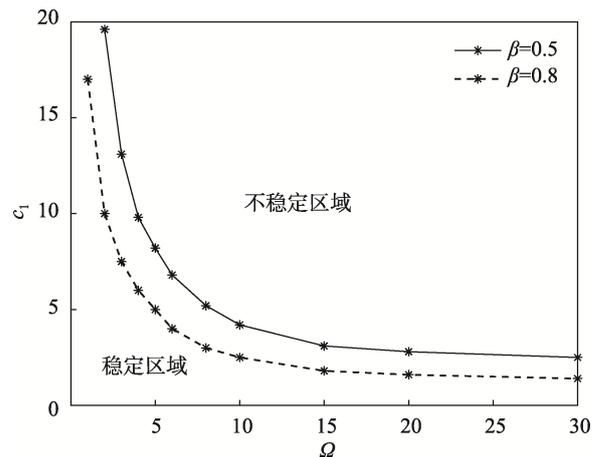


图10 非均匀张力系数与稳定区域的关系
Fig.10 Relationship between non-uniform tension coefficient and stable region

当 $r=1$ 、 $c_0=1$ 、 $\beta=0.5$ ，张力比分别为 $\lambda=1$ 和 $\lambda=2$ 时，运动多层膜的张力比与稳定区域的关系见图 11。由图 11 可知，当运动多层膜张力比增大时，稳定区域减小。

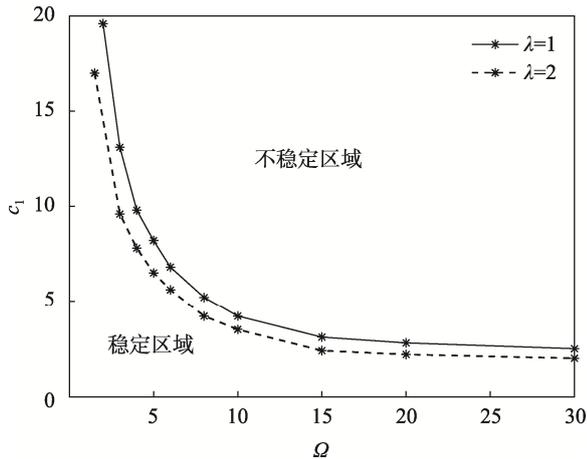


图 11 张力比与稳定区域的关系

Fig.11 Relationship between tension ratio and stable region

当 $\lambda = 1$ 、 $c_0 = 1$ 、 $\beta = 0.5$, 张力比分别为 $r = 1$ 和 $r = 2$ 时, 运动多层膜的长宽比与稳定区域的关系见图 12。由图 12 可知, 当运动多层膜长宽比增大时, 稳定区域增大。

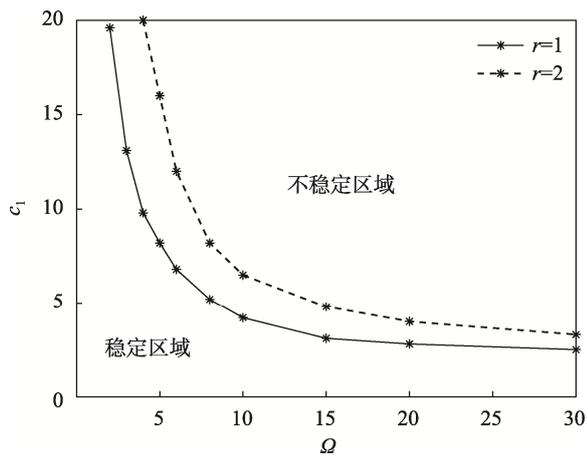


图 12 长宽比对稳定区域的影响

Fig.12 Effect of aspect ratio on stable region

5 结语

文中研究了变速度多层膜结构在非均匀张力作用下的稳定性, 以正弦速度变化的无量纲频率和幅值为横纵坐标, 绘制了动力稳定性方程特征值为 1 时的稳定区域边界变化曲线, 说明了速度以正弦扰动时, 速度变化的幅值与频率越小, 越有利于系统的平稳运行。同时分析了系统不同参数对运动多层膜结构稳定传输的作用规律, 研究结论如下。

- 1) 对于非均匀张力下运动多层膜结构, 增大平均速度、张力比、非均匀张力系数, 系统的稳定区域会变小; 增大长宽比, 运动多层膜的稳定区域会变大。
- 2) 在系统不同参数中, 平均速度的变化对运动多层膜稳定区域的影响最为显著。

3) 当边界条件为对边简支对边固支时, 动态稳定曲线在 $\Omega = 15$ 之后变的平缓, 当边界条件为四边简支时, 动态稳定曲线在 $\Omega = 50$ 之后才变的平缓。由此可知, 四边简支边界对速度变化频率更为敏感, 在相同条件下, 对边简支对边固支边界比四边简支边界的稳定区域更大。

该研究对提高运动多层薄膜结构印刷质量、改善柔性电子薄膜印刷在变速运动工况下镀层平整性与套印准确性, 确保薄膜稳定传输有重要参考意义。

参考文献:

- [1] 尹周平, 黄永安. 柔性电子制造材料、器件与工艺[M]. 北京: 科学出版社, 2016: 285-300.
YIN Zhou-ping, HUANG Yong-an. Flexible Electronic Manufacturing Materials, Devices and Technologies[M]. Beijing: Science Press, 2016: 285-300.
- [2] 赵飞, 吴锦武, 赵龙胜. 采用分层理论计算层合板的固有频率和振型[J]. 噪声与振动控制, 2014, 34(2): 34-40.
ZHAO Fei, WU Jin-wu, ZHAO Long-sheng. Analysis for Natural Frequencies and Mode Shapes of Laminated Composite Plates Using Layerwise Theory[J]. Noise and Vibration Control, 2014, 34(2): 34-40.
- [3] 刘金建, 谢锋, 姚林泉, 等. 基于非局部理论的轴向运动黏弹性纳米板的参数振动及其稳定性[J]. 振动与冲击, 2017, 36(19): 13-20.
LIU Jin-jian, XIE Feng, YAO Lin-quan, et al. Parametric Vibration and Stability of an Axially Moving Viscoelastic Nanoplate Based on the Nonlocal Theory[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(19): 13-20.
- [4] 陈立群, 唐有琦. 面内变速运动粘弹性板的非线性参数振动[C]// 第四届全国动力学与控制青年学者研讨会论文摘要集, 大连, 2010: 5-6.
CHEN Li-qun, TANG You-qi. Nonlinear Parametric Vibration of a Viscoelastic Plate Moving At Variable Speed in Plane[C]// Abstracts of The 4th National Symposium on Dynamics and Control for Young Scholars, Dalian, 2010: 5-6.
- [5] YANG X, CHEN L, ZU J. Vibrations and Stability of an Axially Moving Rectangular Composite Plate[J]. Journal of Applied Mechanics, 2011, 78(1): 011018.
- [6] LU S, XUE N, ZHANG W, et al. Dynamic Stability of Axially Moving Graphene Reinforced Laminated Composite Plate under Constant and Varied Velocities[J]. Thin-Walled Structures, 2021, 167: 108176.
- [7] 刘金堂, 杨晓东, 张宇飞, 等. 轴向变速运动正交各向异性板的动态稳定性[J]. 应用力学学报, 2010,

- 27(1): 49-52.
- LIU Jin-tang, YANG Xiao-dong, ZHANG Yu-fei, et al. Dynamic Stability of Axially Accelerating Orthotropic Plates[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2010, 27(1): 49-52.
- [8] HATAMI S, RONAGH H R, AZHARI M. Exact Free Vibration Analysis of Axially Moving Viscoelastic Plates[J]. Computers and Structures, 2008, 86(17/18): 1738-1746.
- [9] AYDOGDU M. A New Shear Deformation Theory for Laminated Composite Plates[J]. Composite Structures, 2009, 89(1): 94-101.
- [10] MARYNOWSKI K. Vibration Analysis of an Axially Moving Multiscale Composite Plate Subjected to Thermal Loading[C]// International Conference on Engineering Vibration (ICoEV), 2018.
- [11] HAN W, DICKINSON S. Free Vibration of Symmetrically Laminated Skew Plates[J], Journal of sound and vibration, 1997, 208(3): 367-390.
- [12] 侯志勇, 王忠民. 轴向运动薄膜的横向振动和稳定性分析[J]. 西安理工大学学报, 2005, 21(4): 402-404.
HOU Zhi-yong, WANG Zhong-min. The Transverse Vibration and Stability Analysis of an Axially Moving Membrane[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2005, 21(4): 402-404.
- [13] 武吉梅. 运动纸带动力学及振动控制研究[D]. 西安: 西安理工大学, 2009: 53-63.
WU Ji-mei. Study on the Dynamics and Vibration Control of the Moving Paper Web[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2009: 53-63.
- [14] 邵明月. 柔性运动薄膜的非线性动力学研究[D]. 西安: 西安理工大学, 2019: 35-46.
SHAO Ming-yue. Nonlinear Dynamics of Flexible Moving Membranes[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2019: 35-46.
- [15] WU J, QING J, SHAO M, et al. Vibration Characteristics and Stability of a Moving Membrane with Variable Speed Subjected to Follower Force[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1545(1): 012008.
- [16] 卢瑶, 武吉梅, 王砚, 等. 随从力作用下变速运动粘弹性硬质薄膜的稳定性研究[C]// 2018 年全国固体力学学术会议摘要集, 哈尔滨, 2018: 483.
LU Yao, WU Ji-mei, WANG Yan, et al. Study on The Stability of Viscoelastic Hard Films Moving at Variable Speed Under Follower Force[C]// Abstracts of 2018 National Conference on Solid Mechanics, Haerbin, 2018: 483.
- [17] GOMAN D J. Free vibration analysis of rectangular plates[M]. Elsevier North Holland, 1982.

责任编辑: 曾钰婵