

# 基于分段速度规划的机器人臂运动平滑减振方法

王恒, 蒋科坚

(浙江理工大学 信息科学与工程学院, 杭州 310018)

**摘要:** **目的** 保证机器人臂在生产作业时, 其末端速度、加速度、jerk 曲线光滑且连续, 避免机器人臂在高速运行时发生剧烈振动。**方法** 提出一种基于分段速度包络轨迹规划方法, 该方法与传统样条算法相比, 边界条件的确定和计算量大大简化, 仅需给定运行轨迹点和期望运行时间, 就能实现机器人臂末端轨迹的速度、加速度以及 jerk 曲线光滑连续, 并且通过调节因子和分段时间间隔可以单独控制加速度、jerk 曲线的波动幅值和整体运动周期。**结果** 在双臂并联机器人平台上, 依次进行本文算法与三次样条算法的对比实验, 以及本文算法在不同调节因子取值下的对比实验。在第1组实验中发现采用本文算法运行机械臂更加平稳, 所得轨迹也很平滑, 而三次样条算法运行机械臂振动较大; 通过第2组对比实验可得, 在分段时间间隔一定的情况下, 调节因子取值越大机械臂运行就会越流畅, 振动也会进一步减小。**结论** 文中提出的方法能够有效抑制机器人臂振动, 可以使机器人高速平稳的运行。

**关键词:** 机器臂运动; 轨迹规划; 振动抑制; 运动平滑

**中图分类号:** TS206.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2023)07-0222-08

**DOI:** 10.19554/j.cnki.1001-3563.2023.07.025

## Smooth Vibration Reduction Method for Robot Arm Motion Based on Segmental Velocity Planning

WANG Heng, JIANG Ke-jian

(School of Information Science and Engineering, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**ABSTRACT:** The work aims to ensure that the end velocity, acceleration and jerk curves of the robot arm are smooth and continuous during production operations, and to avoid violent vibration of the robot arm during high-speed operation. In this work, a segmented velocity envelope trajectory planning method was proposed, which greatly simplified the determination of boundary conditions and computation compared with the traditional spline algorithm, and could realize the smooth and continuous velocity, acceleration and jerk curve of the end trajectory of the robot arm only given the running trajectory points and the desired running time, and could control the acceleration, jerk curve and overall motion period individually by adjusting the factor and segmentation time interval. On the two-armed parallel robot platform, the comparison experiments between this algorithm and the cubic spline algorithm and the comparison experiments of this algorithm with different values of adjustment factors were conducted in turn. In the first group of experiments, it was found that the arm was smoother and the resulting trajectory was smooth, but the vibration of the arm was higher with the cubic spline algorithm; in the second group of comparative experiments, it was found that the larger the adjustment factor was, the smoother the arm would be and the vibration would be reduced. Therefore, the method proposed in this work can ef-

收稿日期: 2022-10-20

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11272288)

作者简介: 王恒 (1994—), 男, 硕士生, 主攻双臂并联机器人控制技术。

通信作者: 蒋科坚 (1972—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为振动主动控制、双臂并联机器人等。

fectively suppress the robot arm vibration and can make the robot run smoothly at high speed.

**KEY WORDS:** robot arm motion; trajectory planning; vibration suppression; motion smoothing

随着食品包装行业自动化程度的提升,工业机器人被广泛应用。提升机器人臂的运动速度是提升机器人工作效率的重要手段,但是机器人臂高速运动引起的振动不仅大大限制机器人臂运动速度极限,还会影响机器人使用寿命。机器人末端速度曲线不光滑导致加速度和 jerk 突变是机器人臂振动的重要原因。机器人的轨迹规划是解决曲线光滑连续性的一个有效方式,因此,对轨迹规划的研究成为机器人控制研究的一个重要课题。

近年来,针对机器人轨迹规划的研究,国内外学者提出了很多方法。李雪梅等<sup>[1]</sup>提出一种改进粒子群算法的时间最优轨迹规划算法,该算法主要针对关节空间进行规划,且算法需利用运动学逆解求得关节空间角度值再进行规划,本文直接在笛卡尔空间进行规划不需正逆解转换运算。Su 等<sup>[2]</sup>提出一种基于毕达哥拉斯速端曲线和 3-4-5 多项式结合的轨迹规划方法,使得机器人的轨迹平滑且具有较稳定的运动特性,但对拐角轨迹和直线轨迹需要采用不同的算法,过程复杂且不易操作。石忠等<sup>[3]</sup>提出一种高阶多项式逼近位移点的轨迹规划方法,但是对多项式系数的求解计算量偏大,且存在数值误差。孙志毅等<sup>[4]</sup>针对挖掘机运动轨迹采用分段多项式插值方法,在很大程度上克服了计算量偏大的缺点,但需利用差分算法才能优化时间,增加了算法的复杂度。陈伟堤等<sup>[5]</sup>采用了非对称 6 次多项式并结合 3 个参数 Lamé 曲线的方法对末端门型轨迹进行了规划,该方法能够得到光滑的速度和加速度曲线,但未关注加速度曲线振荡的幅值。胡晓峰<sup>[6]</sup>通过改进梯形轨迹规划算法,实现了末端轨迹的速度和加速度平滑连续,但没有对 jerk 曲线进行分析。李远等<sup>[7]</sup>采用了改进的 S 型曲线对码垛机器人的轨迹进行规划,该方法可令 jerk 曲线光滑连续。靳岚等<sup>[8]</sup>提出一种基于三次贝塞尔三角样条插值的方法对工业机器人轨迹进行规划,该方法能够得出一个平滑连续且波动起伏很小的加速度曲线,但 jerk 曲线仅连续却不光滑。Oarcea 等<sup>[9]</sup>根据恒定速度轮廓和梯形轮廓确定平面三自由度并联机器人最佳规划算法,使得轨迹之间平稳运动。娄军强等<sup>[10]</sup>针对柔性机械臂的弹性振动,提出了一种五次多项式与遗传算法相结合的轨迹规划方法,该方法可以有效提高机械臂的控制精度。梅江平等<sup>[11]</sup>利用 3-4-5 多项式运动规律对机器人末端轨迹进行规划,采用五次非均匀有理 B 样条的方法对关节空间进行规划,并将 2 种轨迹方法进行了对比,但没有对 jerk 曲线进行分析。方健等<sup>[12]</sup>针对码垛机器人提出了三次样条插值的方法,可以使角速度、角加速度曲线连续,但是加速度曲线波动起伏较大且 jerk 部分值呈阶跃变化。Wang 等<sup>[13]</sup>提出

一种改进的 3-5-3 多项式插值轨迹规划算法,该方法使得加速度曲线变得光滑连续,但速度和加速度曲线波动幅值较大。Zhang 等<sup>[14]</sup>根据 NURBS 曲线进行轨迹规划,并使用遗传算法进行优化,该方法可以实现机器人运行时间最优。Zhang 等<sup>[15]</sup>采用了不对称的五阶和六阶多项式运动定律,使 Par4 机器人的末端运行更加平稳,并减少了残余振动。

目前,对机器人末端轨迹规划算法普遍采用多项式插值方法、三角样条插值多项式法和三次样条函数法等。以上方法在实际工程应用中经常会遇到一些问题,譬如,算法需要提供较多条件,而实际得到相应的数据很困难;若用户仅给定轨迹点和工作周期要求,以往算法的系数求解存在一定难度且计算量大。

本文提供的轨迹规划算法和传统样条算法类似,均为分段轨迹规划。不同的是本文针对速度曲线,算法提供了 3 种边界条件,用户可根据需求进行选择,每种边界条件仅需给定轨迹点并设定轨迹分段时间间隔,就能通过求解少量方程组确定唯一的运动规律。与传统算法相比,本文算法的计算量大大降低,最后通过对比试验验证本文算法的适用性和正确性。

## 1 轨迹规划算法的提出

本文提出一种分段速度曲线规划方法,通过给定  $n+1$  个轨迹点将机器人末端轨迹划分成  $n$  段 ( $n$  为正整数)。设定轨迹分段时间间隔均为  $t_T$ , 轨迹点对应的时刻分别设为  $[t_0, t_1, t_2, \dots, t_n]$ , 其中  $t_0 = 0$ , 分段时间间隔  $t_T$  和时间点的关系可表示为:

$$t_n - t_{n-1} = t_T \quad (1)$$

算法是以轨迹点之间的平均速度为研究对象的,可将规划前每段轨迹视为匀速运动,因此,分段越多,规划越精细。规划前速度曲线如图 1 所示。

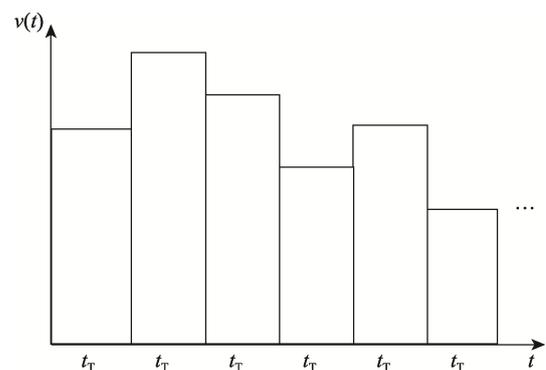


图 1 规划前速度曲线

Fig.1 Speed profile before planning

观察图 1 可知,每段轨迹的速度曲线和时间轴围成矩形形状,现对每个矩形采用图 2 方式进行规划。

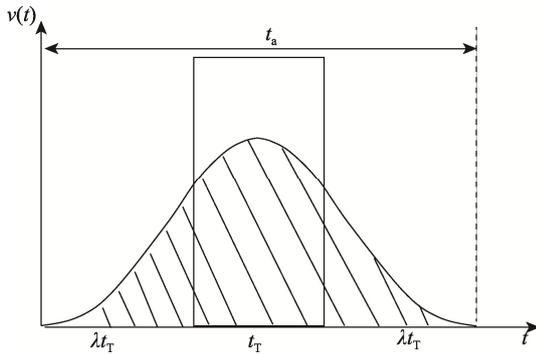


图 2 速度曲线规划方式  
Fig.2 Planning method of speed profile

图 2 中,采用一个平滑的曲线代替原来的矩形速度曲线。如果规划后平滑曲线的包络面积与矩形的面积相等,那么就能保证规划前后每段的位移是一致的。以此类推,所有分段按平滑曲线规划叠加和按矩形叠加,其位移是相同的。位移轨迹是近似的,近似程度取决于平滑曲线形状与矩形的近似程度。

图 2 中规划后的速度曲线所用时间可以用式(2)表示。

$$t_a = (2\lambda + 1)t_T \tag{2}$$

式中:  $t_a$  为每段轨迹规划后速度曲线所占时间;  $\lambda$  为无量纲调节因子,  $\lambda > 0$ 。通过图 2 的时间轴可以看出,规划后的曲线所占的时间在原来矩形所占时间基础上左右各延长  $\lambda t_T$ 。

现对整个轨迹的速度曲线进行规划,并将相邻规划后曲线交叉部分进行叠加合成,为确保叠加合成的速度曲线是光滑的,需令图 2 中规划后速度曲线的起始点和终点的加速度值为 0,规划后总的速度曲线如图 3 所示。

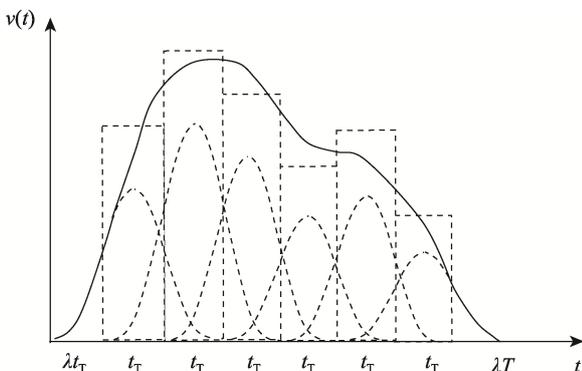


图 3 规划后的速度曲线  
Fig.3 Speed profile after planning

图 3 中包络曲线中的实线就是规划后合成的速

度曲线,可以看出曲线是平滑连续的。在时间轴上,规划后合成曲线所用时间为:

$$t_{all} = (n + 2\lambda)t_T \tag{3}$$

其中,  $t_{all}$  也是机器人运动一个周期所用的时间。通过式(3)可以得出,机器人的运动周期可以通过  $\lambda$  和  $t_T$  进行控制的。

## 2 轨迹规划算法推导

### 2.1 运动规律的设定

将图 2 中规划后的曲线,可视为遵循  $m$  次多项式运动规律,并设图 3 中第  $k$  个矩形对应的速度值为  $v_k$ , 其面积  $S_k$  计算见式(4)。

$$S_k = v_k t_T \tag{4}$$

式中:  $S_k$  为图 3 中第  $k$  个矩形的面积,  $k \in [1, 2, 3, \dots, n]$ 。

设图 3 中第  $k$  个矩形规划后曲线的时间起始点为  $t_{k-1}$ , 结束的时间点设为  $t_f$ , 其中  $t_f$  为:

$$t_f = t_{k-1} + t_a \tag{5}$$

设第  $k$  个矩形规划后的速度曲线遵循的运动规律见式(6)。

$$v_k(t) = a_{k0} + a_{k1}(t - t_{k-1}) + a_{k2}(t - t_{k-1})^2 + \dots + a_{km}(t - t_{k-1})^m \tag{6}$$

式中:  $t \in [t_{k-1}, t_f]$ ;  $a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{km}$  为多项式的系数;  $m$  取决于边界条件设定。

图 3 中规划后合成的速度曲线的表达式见式(7)。

$$M(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t) \tag{7}$$

式中:  $M(t)$  为合成的速度曲线函数。

式(7)两边同时对  $t$  求  $a$  阶导数,得:

$$M(t)^{(a)} = \sum_{k=1}^n v_k(t)^{(a)} \tag{8}$$

式中:  $a \in [1, 2, 3, \dots, m]$ 。其中当  $a=1$  时,可得出规划后合成的加速度曲线;当  $a=2$  时,可求得规划后合成的 jerk 曲线;当  $a=3$  时,得出的是规划后合成的 snap 曲线。

综上,式(7)就是图 3 中规划后合成的速度曲线遵循的运动规律,只需求得式(6)中的  $a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{km}$  和  $m$  值,运动规律就能唯一确定。

### 2.2 边界条件的确定

式(6)可根据图 2 中规划后速度曲线的边界条件和曲线与时间轴所围成面积来确定,其中图 2 中规划后曲线所围成面积可用式(9)表示。

$$\int_{t_{k-1}}^{t_f} v_k(t) dt = S_k \tag{9}$$

图 2 可以看出规划后的速度曲线的初始点和终止点的速度值为 0, 除此之外的边界条件需根据实际工程要求来确定, 可分为以下情况。

1) 若仅仅需要规划后合成的速度曲线是光滑连续的, 即合成的速度曲线如图 3 所示。需令图 2 中规划后曲线的初始点和终止点的加速度值为 0, 如此, 速度曲线的初始点和终止点的速度、加速度值均为 0 以及速度曲线所围成面积  $S_k$  的值共 5 个条件, 因此, 式 (6) 中的  $m$  的值为 4。

2) 若在 (1) 的基础上要求加速度曲线也是光滑连续的, 需令图 2 中规划后曲线的初始点和终止点的 jerk 的值也为 0, 所有的边界条件合在一起共计 7 个条件, 则  $m$  的值就为 6。

3) 若要求规划后 jerk 曲线是光滑连续的, 需在 (2) 的基础上令初始点和终止点的 snap 的值为 0, 这样条件就加到了 9 个,  $m$  的值就为 8。

按照上述边界条件的规律, 对机器人末端轨迹的要求增加一个等级, 条件就会增加 2 个,  $m$  的值也会增加 2。实际操作中, 边界条件达到第 2 个就能够满足机器人工作的一般需求。

### 2.3 运动规律系数的确定

根据上述中的边界条件, 针对第  $k$  段轨迹规划后的速度曲线可以列出以下方程组:

$$v_k(t_{k-1}) = 0 \quad (10)$$

$$v_k(t_f) = 0 \quad (11)$$

$$v_k(t_{k-1})^{(a)} = 0 \quad (12)$$

$$v_k(t_f)^{(a)} = 0 \quad (13)$$

若采用第 1 种边界条件, 可知图 2 中规划后速度曲线遵循四次多项式函数运动规律, 求导阶数  $a$  只取 1 即可, 联立式 (4)、式 (9) — (13) 求得常系数:

$$a_{k0} = 0, a_{k1} = 0, a_{k2} = \frac{30v_k}{(2\lambda+1)^3 t_T^2},$$

$$a_{k3} = \frac{-60v_k}{(2\lambda+1)^4 t_T^3}, a_{k4} = \frac{30v_k}{(2\lambda+1)^5 t_T^4}$$

图 3 中规划后合成的速度曲线具体解析式见式 (14)。

$$M(t) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{30v_k}{(2\lambda+1)^3 t_T^2} (t-t_{k-1})^2 + \frac{-60v_k}{(2\lambda+1)^4 t_T^3} (t-t_{k-1})^3 + \frac{30v_k}{(2\lambda+1)^5 t_T^4} (t-t_{k-1})^4 \right] \quad (14)$$

若采用第 2 种边界条件, 图 2 规划后曲线遵循六次多项式函数, 求导阶数  $a$  取 1、2 即可, 联立 (4)、式 (9) — (13) 求得常系数:

$$a_{k0} = 0, a_{k1} = 0, a_{k2} = 0, a_{k3} = \frac{140v_k}{(2\lambda+1)^4 t_T^3}, a_{k4} = \frac{-420v_k}{(2\lambda+1)^5 t_T^4}, a_{k5} = \frac{420v_k}{(2\lambda+1)^6 t_T^5}, a_{k6} = \frac{-140v_k}{(2\lambda+1)^7 t_T^6}$$

合成的速度曲线具体解析式见式 (15)。

$$M(t) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{140v_k}{(2\lambda+1)^4 t_T^3} (t-t_{k-1})^3 + \frac{-420v_k}{(2\lambda+1)^5 t_T^4} (t-t_{k-1})^4 + \frac{420v_k}{(2\lambda+1)^6 t_T^5} (t-t_{k-1})^5 + \frac{-140v_k}{(2\lambda+1)^7 t_T^6} (t-t_{k-1})^6 \right] \quad (15)$$

若采用第 3 种边界条件, 图 2 规划后曲线遵循八次多项式, 求导阶数  $a$  只取 1、2、3 即可, 联立 (4)、式 (9) — (13) 求得常系数:

$$a_{k0} = 0, a_{k1} = 0, a_{k2} = 0, a_{k3} = 0,$$

$$a_{k4} = \frac{630v_k}{(2\lambda+1)^5 t_T^4}, a_{k5} = \frac{-2\ 520v_k}{(2\lambda+1)^6 t_T^5},$$

$$a_{k6} = \frac{3\ 780v_k}{(2\lambda+1)^7 t_T^6}, a_{k7} = \frac{-2\ 520v_k}{(2\lambda+1)^8 t_T^7},$$

$$a_{k8} = \frac{630v_k}{(2\lambda+1)^9 t_T^8}$$

合成的速度曲线的解析式见式 (16)。

$$M(t) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{630v_k}{(2\lambda+1)^5 t_T^4} (t-t_{k-1})^4 + \frac{-2\ 520v_k}{(2\lambda+1)^6 t_T^5} (t-t_{k-1})^5 + \frac{3\ 780v_k}{(2\lambda+1)^7 t_T^6} (t-t_{k-1})^6 + \frac{-2\ 520v_k}{(2\lambda+1)^8 t_T^7} (t-t_{k-1})^7 + \frac{630v_k}{(2\lambda+1)^9 t_T^8} (t-t_{k-1})^8 \right] \quad (16)$$

以此类推, 随着边界条件的增加, 多项式次数  $m$  增加 2, 求导的次数, 即  $a$  的值就会顺势递增多取 1 个值, 所求的多项式系数也会增加 2 个。

## 3 算法的对比

将本文提出的算法和以往常规算法进行对比, 常规算法中有多项式插值算法, 三角样条插值多项式法以及三次样条法等。其中, 三角样条曲线的波动幅度是大于三次样条的, 因此, 本文算法着重于多项式算法和三次样条进行比较。

### 3.1 给定条件的对比

多项式算法的表达式和三次样条的表达式可分别写成式 (17) 和式 (18)。

$$p(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n \quad (17)$$

$$y(t) = \{x_i(t), t \in [t_i, t_{i+1}]\},$$

$$x_i(t) = c_{i0} + c_{i1}(t-t_i) + c_{i2}(t-t_i)^2 + \quad (18)$$

$$c_{i3}(t-t_i)^3 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

观察式 (17) 和式 (18) 可以看出, 系数的确定都需给定轨迹点及对应的时刻。

多项式 (17) 利用给定的  $n+1$  个轨迹点及对应时刻, 可通过求解一个  $n+1$  阶方程组确定式 (17) 的所有

系数,从而得出具体的数值表达式。随着  $n$  的增加可以很容易实现任意阶导数光滑连续,速度、加速度以及 jerk 曲线不光滑问题也能解决。若  $n$  取值较小,难以保证到 jerk 曲线光滑,因此给定的轨迹点应足够多。

对于式 (18),不仅需要给定轨迹点和对应时刻,还需进一步根据边界条件,给定或者求得中间轨迹点对应的速度值系数才能求出,其数值表达式才能唯一确定。

本文提出的算法不需要严格给出轨迹点对应的时刻,仅需给定轨迹点和所需的运动周期即可,算法所需条件相对减少。

### 3.2 边界条件和计算量的对比

本文算法的提出是建立在多项式和三次样条的基础上的,但相对三次样条算法和多项式,在边界条件的选取和计算量上存在很大的优势。

多项式算法不存在边界条件的确定,但是存在一定的计算量,若给定的轨迹点很多,在进行系数求解的过程中数值计算效率较低,且存在数值误差。若给定的轨迹点发生变化,多项式的系数就需要重新计算。

三次样条算法边界条件有 3 种,无论采用何种边界条件都需要计算高阶方程组,计算量较大,而且由于三次样条次数的限制,轨迹的加速度曲线虽是连续的却不是光滑的。若采用更高次数样条函数,需要计算的系数更多,中间插值点的连续性也会增加,计算系数的方程组就会更加复杂。

本文算法也有 3 种边界条件,但是此 3 种边界条件是根据用户要求确定的,而不是根据给定条件计算系数的角度确定的,通过观察式 (14) — (16) 3 种边界条件下的运动规律可知,计算的系数最多只有 5 个,计算量大大降低。

### 3.3 曲线形态的可调性

采用多项式算法进行轨迹规划时,曲线的波动幅值较大,且无法控制。采用三次样条进行轨迹规划曲线的波动虽然很小,却难以保证加速度和 jerk 曲线的光滑连续性,采用更高次样条需付出烦琐的计算量代价。

文中所提出的算法,提供 2 个参数,可调因子  $\lambda$  和分段时间间隔  $t_T$ ,其中可调因子  $\lambda$  不仅可以控制速度、加速度和 jerk 曲线的波动幅值,还可以改变轨迹在拐角处的弧度。

## 4 试验验证和分析

双臂并联机器人是食品生产包装中常用到的工业机器人,为验证本文提出算法的正确性和优势,本节将在实验室提供的双臂并联机器人平台进行试验验证,本试验采用了食品包装生产线中常用的物品分拣轨迹,即门型轨迹。给定门型轨迹的轨迹点个数为 15,分为 14 段轨迹,试验分为 2 个部分,分别是本

文算法与传统三次样条算法对比试验和本文算法在  $\lambda$  取不同值时的对比试验。

### 4.1 双臂并联机器人试验平台介绍

试验平台的硬件连接如图 4 所示,其中控制器选用了 Omron NJ 控制器,软件编程环境为 Sysmac Studio。

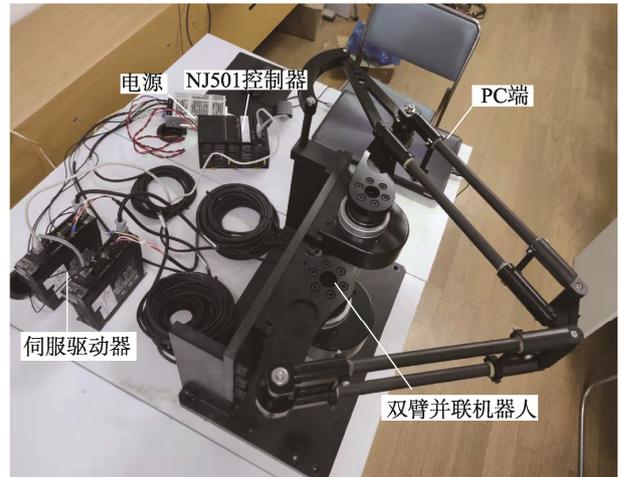


图 4 双臂并联机器人试验平台  
Fig.4 Experimental platform of two-armed parallel robot

双臂并联机器人数学模型如图 5 所示,其机械结构参数如表 1 所示。

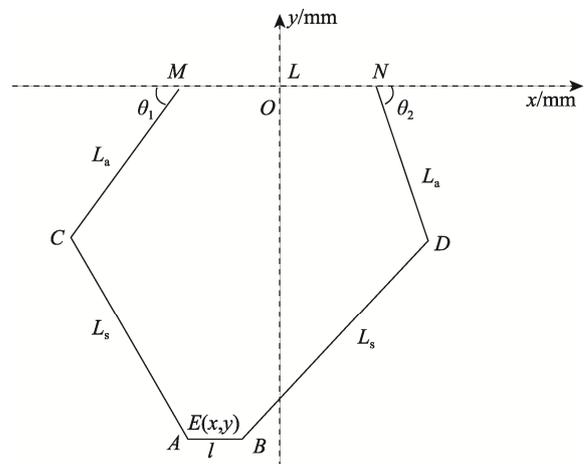


图 5 双臂并联机器人数学模型  
Fig.5 Mathematical model of two-armed parallel robot

表 1 双臂并联机器人机械参数  
Tab.1 Mechanical parameters of two-armed parallel robot

| 参数         | 长度/mm |
|------------|-------|
| 主动臂 $L_a$  | 160   |
| 从动臂 $L_s$  | 370   |
| 驱动关节距离 $L$ | 176   |
| 末端关节距离 $l$ | 76    |

### 4.2 与三次样条算法对比试验

分别将三次样条算法和本文提出的分段速度曲线算法导入双臂并联机器人试验平台进行试验。其中本文算法选用了前文所述的第 3 种边界条件, 参数  $t_T=0.08\text{ s}$ ,  $\lambda$  取 1, 根据式 (3) 求得机器人运动周期为 1.28 s。为便于对照试验, 三次样条算法运动周期与本文算法设定一致。试验结果如图 6 所示。

图 6 左侧为 2 种算法对应的机器人末端轨迹图, 右侧为计算得出的 2 种轨迹  $x$  方向的速度、加速度和 jerk 曲线。通过对比机器人实际运行状态得出, 采用本文的算法机器人臂运行更加平稳, 振动较大的是采用三次样条算法的轨迹。

观察左侧 2 个轨迹图可见, 采用三次样条算法得出的门型轨迹, 在竖直轨迹处存在凸起和内凹, 机器人在此处进行物品拣取工作会造成物品抓取摆动较

大。本文算法运行的轨迹不存在此问题, 且在轨迹拐角处存在弧度缓冲, 弧形轨迹可以平滑 2 个直线方向的接合点, 避免轨迹在拐角处的冲击。对比 2 种算法的速度、加速度和 jerk 曲线可知, 采用三次样条算法的速度曲线是光滑连续的, 但加速度曲线连续却不是光滑的, 且 jerk 曲线存在阶跃变化。这是三次样条算法振动较大的主要原因。

### 4.3 不同调节因子的对比试验

为了更加突出本文算法的优势, 本节试验将通过改变本文算法中提供的参数  $\lambda$  实现对机器人臂振动的调节, 并将不同  $\lambda$  取值下的机器人运行结果进行对比。本次试验周期仍然设定为 1.28 s,  $\lambda$  取 1、1.5、2。对 3 种不同  $\lambda$  的取值分别进行试验, 机器人末端轨迹的试验结果如图 7 所示, 其中  $\lambda$  取 1 的结果在图 6 中已给出。

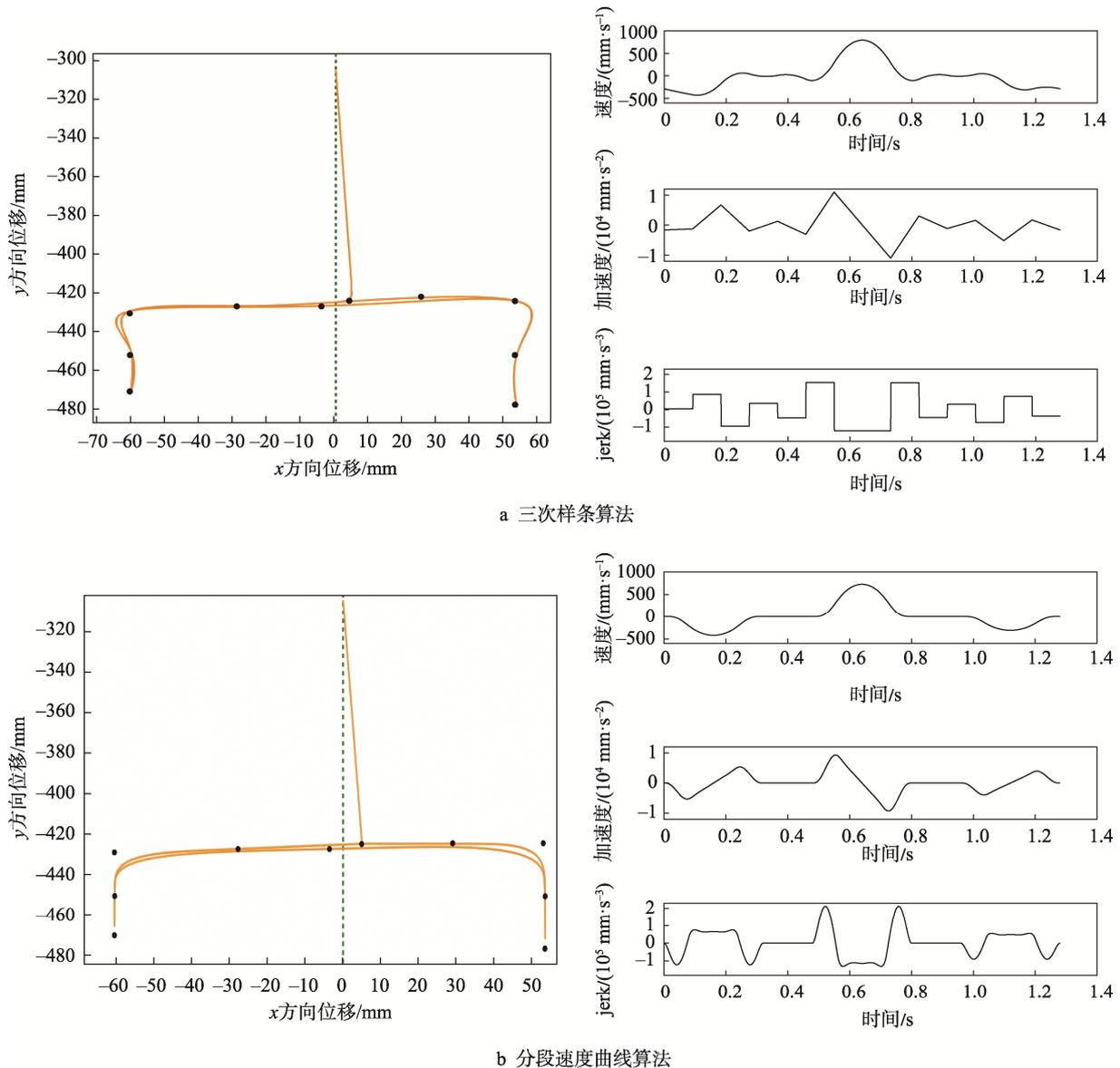


图 6 2 种算法试验结果

Fig.6 Graph of experimental results of two algorithms

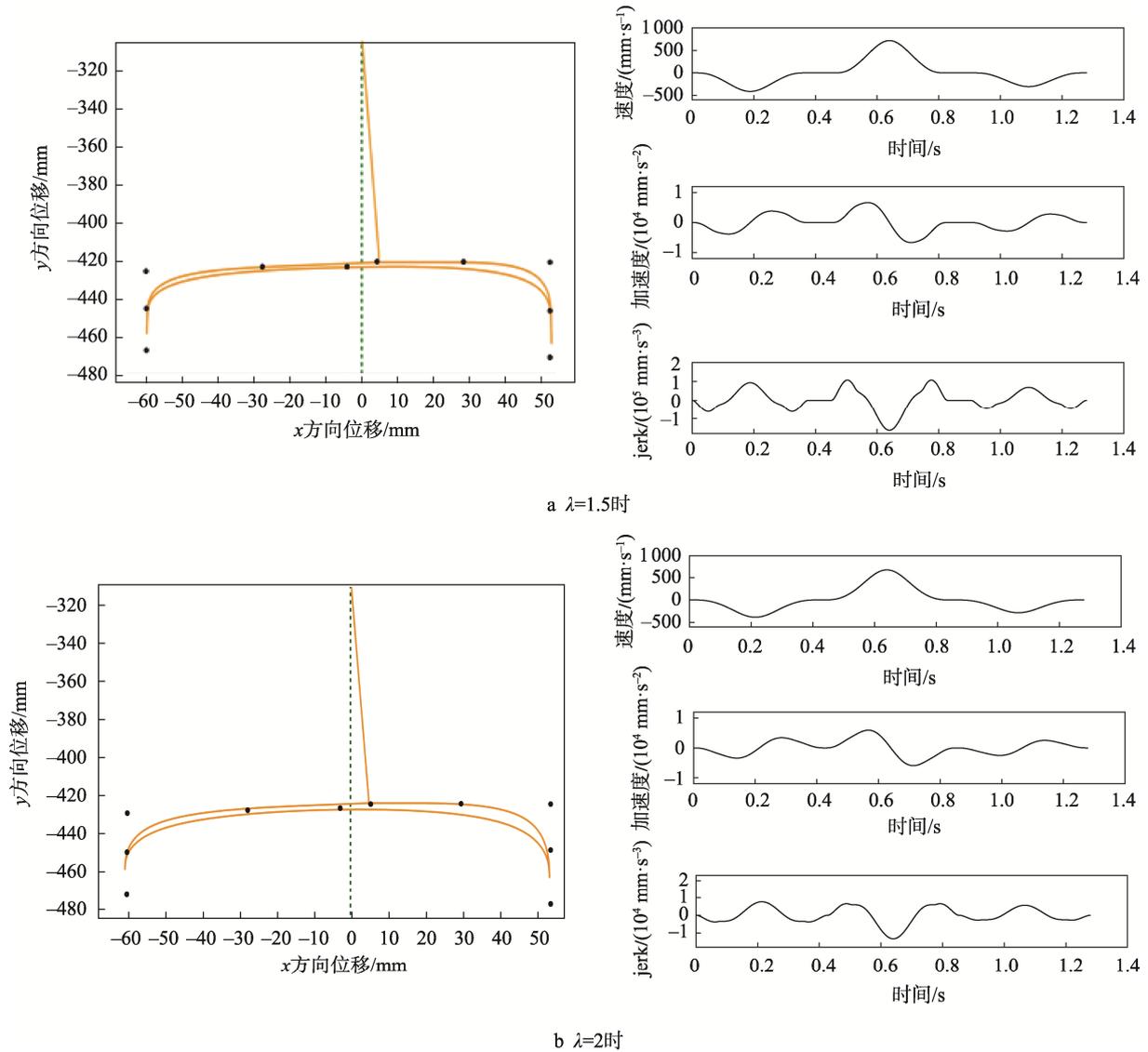


图7 当  $t_T=0.08$  s,  $\lambda$  取值不同的试验结果  
Fig.7 Plot of experimental results for  $t_T=0.08$  s and  $\lambda$  taken as 1.5 and 2

结合图6、7的左图和实际运行状态可知,  $\lambda$  取1、1.5、2时的2种轨迹均能起到减振效果。其中, 机器人采用  $\lambda=2$  的轨迹运行更加平稳。对照左侧轨迹图, 随着  $\lambda$  的增大, 拐角处的弧度逐渐增大, 机器人运行更加流畅, 但会远离拐角处目标端点。反之, 随着  $\lambda$  减小, 拐角弧度逐渐减小, 轨迹会逐渐逼近目标端点, 但运动的平滑性会变差。进一步验证了本算法可以通

过改变  $\lambda$  值优化轨迹。

图6和图7的右图是通过计算得出的对应轨迹的  $x$  方向速度、加速度以及 jerk 曲线, 显然, 所有曲线均是光滑连续的。实际上, 通过调节  $\lambda$  的取值也可改变速度、加速度和 jerk 曲线的波动范围, 通过图6、7的右图得出了  $\lambda$  取不同值的速度、加速度和 jerk 曲线的波动范围, 如表2所示。

表2  $\lambda$  取1、1.5、2时, 速度、加速度和 jerk 曲线波动范围  
Tab.2 Fluctuation range of velocity, acceleration and jerk curve when  $\lambda$  is taken as 1, 1.5 and 2

| $\lambda$ | 速度曲线波动范围/( $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ) | 加速度曲线波动范围/( $\text{mm}\cdot\text{s}^{-2}$ ) | jerk 曲线波动范围/( $\text{mm}\cdot\text{s}^{-3}$ )            |
|-----------|--|---|--|
| 1         | 1 148(-419 ~ 729)                          | 18 509(-9272 ~ 9237)                        | $3.37\times 10^5(-1.30\times 10^5 \sim 2.07\times 10^5)$ |
| 1.5       | 1 131(-412 ~ 719)                          | 13 351(-6671 ~ 6680)                        | $2.7\times 10^5(-1.6\times 10^5 \sim 1.1\times 10^5)$    |
| 2         | 1 044(-374 ~ 670)                          | 11 855(-5925 ~ 5930)                        | $2.05\times 10^5(-1.3\times 10^5 \sim 7.5\times 10^4)$   |

结合图 6、7 和表 2 可知, 随着  $\lambda$  的增加, 机器人末端的速度、加速度以及 jerk 曲线波动范围逐渐变小。此外, 3 种曲线不仅都是光滑的, 而且在每段曲线的衔接点处随着  $\lambda$  的增加, 3 种曲线的衔接处的弧度会更加显著。

由此得出, 文中提出的算法在机器人运行周期确定的情况下, 可以通过增大  $\lambda$  取值, 减小末端轨迹的速度、加速度和 jerk 曲线的波动幅值, 平滑每段曲线的衔接点, 以此达到减振的目的。

## 5 结语

本文针对食品包装机器人末端轨迹规划, 在前人的基础上, 提出了分段速度曲线轨迹规划方法, 算法仅需给定运动周期和轨迹点, 并根据需求确定边界条件, 经较少计算便可得出唯一的运动规律。与传统算法相比, 计算量更少, 且引入调节因子使得轨迹的平滑性灵活可调。

通过 2 个对比试验可得, 传统三次样条算法得出的速度、加速度和 jerk 曲线不能保证全部光滑连续, 而本文算法得出的所有运动曲线均是光滑连续的。此外, 通过改变  $\lambda$  的取值可以对轨迹的形态、速度、加速度以及 jerk 曲线的波动幅值进行调节, 达到对运动轨迹平滑减振的目的。

### 参考文献:

- [1] 李雪梅, 崔菲菲, 郭义华, 等. 阀口袋套袋机器人轨迹优化方法研究[J]. 包装工程, 2022, 43(13): 180-188.  
LI Xue-mei, CUI Fei-fei, GUO Yi-hua, et al. Trajectory Optimization Method of Valve Pocket Bagging Robot[J]. Packaging Engineering, 2022, 43(13): 180-188.
- [2] SU Ting-ting, CHENG Long, WANG Yun-kuan, et al. Time-Optimal Trajectory Planning for Delta Robot Based on Quintic Pythagorean-Hodograph Curves[J]. IEEE Access, 2018, 6: 28530-28539.
- [3] 石忠, 王永智, 胡庆雷. 基于多项式插值的自由漂浮空间机器人轨迹规划粒子群优化算法[J]. 宇航学报, 2011, 32(7): 1516-1521.  
SHI Zhong, WANG Yong-zhi, HU Qing-lei. A Polynomial Interpolation Based Particle Swarm Optimization Algorithm for Trajectory Planning of Free-Floating Space Robot[J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(7): 1516-1521.
- [4] 孙志毅, 张韵悦, 李虹, 等. 挖掘机的最优时间轨迹规划[J]. 机械工程学报, 2019, 55(5): 166-174.  
SUN Zhi-yi, ZHANG Yun-yue, LI Hong, et al. Time Optimal Trajectory Planning of Excavator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(5): 166-174.
- [5] 陈伟堤, 方红根, 何文松, 等. Delta 机器人拾放操作门型轨迹优化与 ANPD 控制试验[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2019, 45(1): 93-101.  
CHEN Wei-di, FANG Hong-gen, HE Wen-song, et al. Optimal Trajectory Planning and ANPD Control Experiment for Pick-and-Place Operation of Delta Robot[J]. Journal of Donghua University (Natural Science Edition), 2019, 45(1): 93-101.
- [6] 胡晓锋. 基于袋装食品装箱的并联机器人的轨迹规划研究[J]. 包装工程, 2020, 41(17): 209-212.  
Hu Xiao-feng. Trajectory Planning of Parallel Robot Based on Bagged Food Packing[J]. Packaging Engineering, 2020, 41(17): 209-212.
- [7] 李远, 农秉茂. 包装搬运机器人运动轨迹优化设计[J]. 包装工程, 2020, 41(1): 123-127.  
LI Yuan, NONG Bing-mao. Optimization Design of Moving Trajectory for Packaging Handling Robot[J]. Packaging Engineering, 2020, 41(1): 123-127.
- [8] 靳岚, 赵莉, 谢黎明. 基于三次 Bézier 三角样条插值的工业机器人连续路径轨迹规划[J]. 机械设计与制造工程, 2019, 48(4): 35-39.  
JIN Lan, ZHAO Li, XIE Li-ming. Continuous Trajectory Planning of the Industrial Robots Based on Cubic Bézier Triangular Spline[J]. Machine Design and Manufacturing Engineering, 2019, 48(4): 35-39.
- [9] OARCEA A, COBILEAN V, STAN S D. Trajectory Planning of a 3-RRRRR Planar Parallel Robot[C]// proceedings of the 2021 9th International Conference on Modern Power Systems (MPS), IEEE, 2021: 1-6.
- [10] 娄军强, 魏燕定, 李国平, 等. 基于遗传优化算法的柔性机械臂抑振轨迹规划研究[J]. 振动与冲击, 2016, 35(11): 1-6.  
LOU Jun-qiang, WEI Yan-ding, LI Guo-ping, et al. Optimal Trajectory Planning of a Flexible Manipulator for Its Vibration Suppression Using Genetic Algorithm[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(11): 1-6.
- [11] 梅江平, 臧家炜, 乔正宇, 等. 三自由度 Delta 并联机械手轨迹规划方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(19): 9-17.  
MEI Jiang-ping, ZANG Jia-wei, QIAO Zheng-yu, et al. Trajectory Planning of 3-DOF Delta Parallel Manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(19): 9-17.
- [12] 方健, 宋宇, 朱茂飞, 等. 基于时间最优的码垛机器人轨迹规划[J]. 控制工程, 2018, 25(1): 93-99.  
FANG Jian, SONG Yu, ZHU Mao-fei, et al. Time-Optimal Trajectory Planning for Palletizing Robots[J]. Control Engineering of China, 2018, 25(1): 93-99.
- [13] WANG Wen-jie, TAO Qing, CAO Yu-ting, et al. Robot Time-Optimal Trajectory Planning Based on Improved Cuckoo Search Algorithm[J]. IEEE Access, 2020, 8: 86923-86933.
- [14] ZHANG Chun-yu, WANG Li-Wei, YU Xing-hu, et al. A Optimized NURBS Curve Trajectory Planning Algorithm Based on Genetic Algorithm[C]// Proceedings of the 2020 Chinese Automation Congress (CAC), 2020: 3529-3534.
- [15] ZHANG Xiao-qing, MING Zhen-feng. Trajectory Planning and Optimization for a Par4 Parallel Robot Based on Energy Consumption[J]. Applied Sciences-Basel, 2019, 9(13): 2076-3417.