### 自动化与智能化技术

# 基于层次级联算法的声表面波传感器快速精确仿真

# 孔超<sup>1</sup>,石义典<sup>2</sup>,范彦平<sup>2\*</sup>

(1.中国科学院声学研究所,北京 100190;2.上海理工大学 光电信息与计算机工程学院,上海 200093)

摘要:目的 针对层次级联技术 (HCT) 在全指型声表面波 (SAW) 器件仿真中耗时较长的问题,以及 使用无限元域 (ILDB) 边界条件时仿真容易出现数值不稳定从而带来误差的问题,需要采用有效的数 值处理方法使仿真结果高效、准确。方法 通过对基本单元的有限元矩阵进行平衡预处理,使用单精度 数值加快仿真;在消去内部自由度时,使用稳定度更高的 LU 分解,可以保证使用无限元域边界条件进 行单精度仿真时结果的准确性。结果 对不同 SAW 器件进行了仿真测试对比验证,文中提出的优化后单 精度 HCT 方法在降低了矩阵求逆导致的误差的同时,与传统的全指型级联方法相比,其仿真时间缩短 了 50%,且所提方法适用于 ILDB 边界条件。结论 文中提出的方法对快速精确设计声表面波传感器具 有重要意义。

#### Fast and Accurate Simulation of SAW Sensor Based on Hierarchical Cascade Algorithm

KONG Chao<sup>1</sup>, SHI Yidian<sup>2</sup>, FAN Yanping<sup>2\*</sup>

(1. Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; 2. School of Optical-electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**ABSTRACT:** In addressing the issue of prolonged simulation time for Hierarchical Cascade Technology (HCT) in simulation of Surface Acoustic Wave (SAW) devices, as well as errors caused by numerical instability when using infinite long damping boundary (ILDB) conditions, effective numerical processing methods are needed to ensure efficient and accurate simulation results. Equilibrium preprocessing the finite element matrices of basic unit blocks, accelerating simulations with single-precision numerical computations, and employing LU decomposition when eliminating internal degrees of freedom could enhance the accuracy of simulation results when ILDB boundary conditions were used for single-precision simulations. Through simulation testing and comparative analysis on various Surface Acoustic Wave (SAW) devices, the optimized single-precision Hierarchical Cascade Technology (HCT) method proposed in this paper not only reduced simulation errors, but also reduced the simulation time by 50% compared with traditional hierarchical cascade methods. Furthermore, the proposed method was applicable to ILDB conditions. The approach developed in this paper holds significant importance for the rapid and accurate design of surface acoustic wave sensors.

**KEY WORDS:** surface acoustic wave; hierarchical cascade technology; equilibrium preprocessing; infinite long damping boundary; single-precision

收稿日期: 2024-04-01

**基金项目:**国家自然科学基金(51705326,52075339)

温度对食品质量、安全性和口感有着重要影响。 因为温度是影响微生物繁殖的主要因素之一,因此不 同的食品在不同的温度下会发生不同的反应。在食品 的加工、保存或运输过程中,低温可以减缓细菌、病 毒和真菌的生长,适当的冷藏和冷冻可以延长食品的 保质期,防止微生物的生长。温度控制不当可能会使 食品腐烂或降低食品的新鲜度,因此准确检测环境温 度必不可少[1-2]。食品保存、运输环境可能面临供电 困难的问题,比如在长途运输中,特别是跨国或跨大 陆的运输,可能难以提供连续的电源供应。一些运输 工具可能不提供或提供有限的电源接口,电源波动或 不稳定可能导致传感器工作不正常,从而影响电池供 电传感器测量食品运输过程中的外部环境温度。此 外,为了维持特定的运输环境,运输容器可能需要保 持良好的密封性。添加电源线或电池的电源设备可能 会破坏容器的密封性,从而影响运输环境。

声表面波(Surface acoustic wave, SAW)器件作 为一种重要的电子元件,广泛应用于无线通信、雷达 系统、传感器网络等领域,以此为原理制作的无线无 源声表面波传感器具备无需外部电源、便于安装维 护、耐用性高等特点。SAW 传感器通常有一个覆盖 其表面的敏感层,当测量参数发生变化时(例如温度、 压力、湿度或化学物质的浓度),敏感层的特性会随 之改变,进而影响谐振频率。通过测量谐振频率的变 化情况,可以确定所测量参数的值。传感器的制作需 要先通过各种仿真算法对 SAW 谐振器的性能进行仿 真测试,目前大部分研究人员使用 COM 方法对 SAW 器件性能进行仿真,但 COM 方法得到的结果精度并 不高<sup>[3]</sup>。近年来出现了一种新仿真方法——层次级联 算法,它是目前同时考虑仿真速度和准确性的最优方 法,且适用于复杂结构的 SAW 器件仿真<sup>[4]</sup>。

自 2016 年 J. Koskela 等提出 HCT 技术以来, 许 多学者对其进行了扩展和改进。Solal 等<sup>[5]</sup>将该方法扩 展到三维,并展示了全三维的仿真结果。Li 等<sup>[6-8]</sup>首 次将该方法应用于体声波谐振器的仿真,并详细分析 了高端显卡对计算速度的影响,随后介绍了镜像级联 方法, 拓展了 HCT 的级联方式。Sui 等<sup>[9]</sup>研究了基本 单元块的大小对 HCT 仿真速度的影响, 拟合预测了 总花费时间的数学模型,之后又研究了全三维 HCT 级联顺序对仿真时间和内存的影响[10]。赵旭鹏[11]在 HCT 算法对基本单元系统矩阵的预处理过程中,对 系统矩阵进行了列缩放,降低了矩阵的条件数,使计 算更加稳定。目前仍存在一些问题:缩放预处理方法 对矩阵条件数降低的效果并不理想;在建立部分模型 时,可能遇到边界使用无限元域(ILDB)来替代完 美匹配层 (PML) 的情况<sup>[12]</sup>, 矩阵列缩放难以满足无 限元域边界情况对稳定性的要求;为了加快仿真速 度,会使用单精度数据类型进行计算,但直接使用单 精度进行仿真,其结果会失真。

针对上述问题,本文首先使用矩阵平衡算法,代替列缩放处理系统矩阵,降低矩阵条件数,以提高 HCT 算法的稳定性;其次,针对使用无限元域边界 条件的模型,利用 LU 分解求解 Schur 补运算,从而 提高 HCT 算法的适用性。通过上述处理,可以稳定 地进行单精度数值仿真。文中首先介绍全指型声表面 波谐振器的 HCT 仿真方法,然后介绍优化过程,最 后以 4 个 SAW 谐振器实例,验证该方法的准确性及 在速度上的优越性。

### 1 HCT 理论基础

层次级联技术的核心思想是充分利用结构的可 重复性,通过基本单元的连续级联过程来模拟整个结 构。首先,采用有限元方法对这些基本单元进行建模, 并通过频域分析得到系统方程,见式(1)。

 $\left[ (1+i\rho)\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{D} \right] X = F$ (1)

式中: *K*、*M*、*D*分别为刚度矩阵、质量矩阵和 阻尼矩阵; *X*为有限元模型的自由度,包括机械位移 和电势; *F*为初始外部施加的物理量,包括应力、电 荷; ρ为一个为模拟损耗所添加的小分量。

在 HCT 中,整个仿真模型被分解为只包含单个 电极的最小基本拼接单元,如图 1 所示,X、T为位 移和应力,V、q分别为电极与衬底交界面处的电势、 电荷,下标 L、R、I 分别表示左边界、右边界和内部 单元。在图 1 中,灰色衬底可使用无限元域 ILDB 或完 美匹配层 PML 边界条件,在最底部添加低反射边界条 件,用于避免底面反射波。将式(1)中的括号部分视 为矩阵A,可得该单元的有限元矩阵,见式(2)。





$$\begin{bmatrix} A_{II} & A_{IL} & A_{IR} & A_{IV} \\ A_{LI} & A_{LL} & A_{LR} & A_{LV} \\ A_{RI} & A_{RL} & A_{RR} & A_{RV} \\ A_{VI} & A_{VL} & A_{VR} & A_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_I \\ X_L \\ X_R \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_L \\ T_R \\ -q \end{bmatrix}$$
(2)

整个矩阵有稀疏对称性质,内部自由度 X<sub>I</sub> 可以 通过 Schur 补方式消去,得到新矩阵 **B**,见式(3)。

$$\begin{bmatrix} B_{\mathrm{LL}} & B_{\mathrm{LR}} & B_{\mathrm{LV}} \\ B_{\mathrm{RL}} & B_{\mathrm{RR}} & B_{\mathrm{RV}} \\ B_{\mathrm{VL}} & B_{\mathrm{VR}} & B_{\mathrm{VV}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{LL}} & A_{\mathrm{LR}} & A_{\mathrm{LV}} \\ A_{\mathrm{RL}} & A_{\mathrm{RR}} & A_{\mathrm{RV}} \\ A_{\mathrm{VL}} & A_{\mathrm{VR}} & A_{\mathrm{VV}} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} A_{\mathrm{LI}} \\ A_{\mathrm{RI}} \\ A_{\mathrm{RI}} \\ A_{\mathrm{VI}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\mathrm{II}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\mathrm{IL}} & A_{\mathrm{IR}} & A_{\mathrm{IV}} \end{bmatrix}$$

$$(3)$$

整个矩阵仍然保持对称特性,但不再稀疏。处理 包含单个电极的基本单元块后,根据器件的周期性, 可以逐步拼接,获得整个器件的响应,如图2所示。



图 2 模型拼接示意图 Fig.2 Schematic diagram of cascade process

需要注意,待拼接表面中每个节点的位移或电势 自由度必须一一对应,这就要求  $X_{R}^{l}$ 与  $X_{L}^{2}$ 边界有相同 的有限元网格。在级联后,拼接面可被当作内部自由 度,使用舒尔补方式消去后,重新变为式(3)中矩 阵 B 的形式。整个模型的系统矩阵规模只与左右边界 和电势自由度相关,因电极上施加的电压相同,经多 次级联后,整个模型的系统矩阵规模可以保持不变。 待处理所有级联后,流入谐振器电极的电流可表示为 式(4)。最后根据 Y=I/V,可以求得对应导纳 Y 参数 的值。

$$I = i\omega Wq = i\omega W \cdot \qquad (4)$$

$$\left( B_{VV} - \begin{bmatrix} B_{VL} & B_{VR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{LL} & B_{LR} \\ B_{RL} & B_{RR} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{LV} \\ B_{RV} \end{bmatrix} \right) V$$

#### 2 快速 HCT 算法

为了加快仿真速度,通常使用单精度数值进行仿 真。在计算时,由式(2)~(4)消去内部自由度的 计算过程通常存在较大误差,这在物理上是由压电转 换效率微弱所致,因此有限元矩阵 A 中与位移自由度 相关的值远大于与电势自由度相关的值,使得矩阵 A的条件数过大。在求解线性方程组时,矩阵的条件数 对于求解结果的精度十分重要,如果条件数过大,则 在使用 Matlab 进行计算时存在矩阵接近奇异值,结 果可能不准确的警告。为了使计算稳定,通常需要对 矩阵 A 进行预处理。在 Schur 补过程中,尤其要注意 内部自由度  $X_I$ 对应的有限元矩阵  $A_{II}$ 的条件数。通常 的处理方法是对矩阵 A 进行列缩放,将自由度 X分 为位移 u 和电势 v 两部分,见式(5)。其中, $A_{II}$ 明 显大于  $A_{22}$ , 令  $u=u'\times10^{-9}$ ,原有限元方程变为式(6)。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_u \\ X_v \end{bmatrix}$$
(5)  
$$\begin{bmatrix} A_{11} \times 10^{-9} & A_{12} \\ A_{21} \times 10^{-9} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_u \\ X_v \end{bmatrix}$$
(6)

缩放因子可以根据缩放后矩阵 A 的条件数拟合 出最佳值,也可直接使用 COMSOL 计算得到 uscale 值。通过上面的处理,可以降低有限元矩阵 A 的条件 数,并能满足双精度数据类型下边界条件为完美匹配 层时大部分模型对计算精度的需求。当激励的声波慢 度曲线存在凹形时,会遇到在 HCT 中使用无限元域 边界条件替代 PML 的情况<sup>[12]</sup>,而无限元域边界条件 对预处理的需求更高,仅进行矩阵列缩放,在求解 时仍会遇到矩阵接近奇异值的警告。此外,若想使 用单精度仿真,仅对矩阵进行列缩放处理也不能提高 仿真结果的准确性,仍需采用其他处理方法来减小计 算误差。

在使用矩阵平衡算法进行缩放后,新矩阵的对角 线上元素的模为 1,非对角线上元素的模不大于 1, 能有效降低矩阵的条件数<sup>[13]</sup>。将此方法引入 HCT 中, 可以有效降低 Schur 求解过程的误差。具体引入位置 可在式(1)中对每个频点组装好的 FEM 矩阵进行置 换和缩放,由于在每个频点内对组装好的系统矩阵单 独进行时会比较耗时,因此这里考虑将平衡处理进行 一定改进,以应用于基本单元的刚度、质量和阻尼矩 阵的预处理中。由于质量矩阵和阻尼矩阵与电势无 关,在 FEM 矩阵中与电势相关的值全为零,无法缩 放,因此以刚度矩阵的缩放为参考,使用平衡缩放算 法处理刚度矩阵 *K*,得到刚度矩阵缩放时对应的对角 矩阵 *Q*、*P*,见式(7)。

$$\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{Q} \times \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} \\ K_{uv} & K_{vv} \end{bmatrix} \times \boldsymbol{P}$$
(7)

用相同的对角矩阵  $Q \, P$  置换和重新缩放质量矩阵及阻尼矩阵,得到缩放后的矩阵M', D', 见式(8)。

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{Q} \times \begin{bmatrix} M_{uu} & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \boldsymbol{P}, \boldsymbol{D}' = \boldsymbol{Q} \times \begin{bmatrix} D_{uu} & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \boldsymbol{P} \quad (8)$$

使用新矩阵 K'、M'、D'代替原有系统矩阵。在 求出结果后,再对结果进行缩放,可以抵消引入的缩 放误差。另一个避免缩放带来误差的方法是在平衡处 理时将矩阵对角线元素模值缩放为 Avv, 非对角线元 素模值不大于 Avv。这里利用电极上电势相同的特点, 在提取单元块 A 的系统矩阵后,将电极处的电势自由 度合并为单个值。

针对使用无限元域边界条件仿真对精度需求更高的问题,可以使用 LU 分解方法替代 Matlab 中矩阵除法求解式(3)中的 Schur 补过程。对矩阵  $A_{II}$ 进行 LU 分解,产生一个上三角阵 U 和一个变换形式的下三角阵 L,使之满足  $A_{II}=L \times U$ 。将式(3)变为式(9)。

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{LL}} & A_{\mathrm{LR}} & A_{\mathrm{LV}} \\ A_{\mathrm{RL}} & A_{\mathrm{RR}} & A_{\mathrm{RV}} \\ A_{\mathrm{VL}} & A_{\mathrm{VR}} & A_{\mathrm{VV}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{\mathrm{LI}} \\ A_{\mathrm{RI}} \\ A_{\mathrm{VI}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{L}\boldsymbol{U})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\mathrm{IL}} & A_{\mathrm{IR}} & A_{\mathrm{IV}} \end{bmatrix}$$
(9)

相较于直接使用 Matlab 中的矩阵除法运算符, 额外进行 LU 分解,具有较好的数据稳定性,避免求 解时矩阵接近奇异值带来误差的问题。通过上述处 理,能够满足单精度数据类型下且边界条件为无限元 域时对精确仿真的需求。

#### 3 快速 HCT 方法实验仿真验证

为了验证文中提出的快速 HCT 方法的仿真精度 和速度,对4种不同结构的 SAW 谐振器 1~4 进行了 二维仿真分析<sup>[14-17]</sup>,并把优化后的 HCT 仿真结果与 原文进行对比,体现了优化后单精度 HCT 方法在时 间上的改进效果。

基本单元的模型使用 COMSOL 软件建立, 按照

图 1 建立有限元模型。在有限元网格划分时,由于单 精度数据有效数据位比双精度数据少一半,因此需注 意网格划分的质量。高质量的网格能够提高数值模拟 的准确性和稳定性,网格的节点和元素应该尽可能与 物体边界和几何特征对齐,以确保在数值模拟中更好 地捕捉局部细节。如果使用自由三角形或自由四边形 网格,并且网格变化设置太过剧烈,则容易导致仿真 结果出现误差。文中使用密度均匀的矩形网格,最大 网格边长在波长的 1/10 以内。4 个仿真模型 1~4 的参 数如表 1 所示。

表 2 展示了平衡处理相较于矩阵列缩放对矩阵条件数的降低效果。以每个模型的叉指电极单元块和 左侧包含无限元域的单元块为例,按照式(1)组装 好系统矩阵后,在首个频点进行 Schur 补消去内部自 由度之前计算式(2)中 $A_{II}$ 对应矩阵的条件数。对比 发现,经平衡处理后,矩阵 $A_{II}$ 的条件数的量级在  $10^{3}$ ~ $10^{8}$ 范围内,波动受到模型参数及网格质量的影 响,而经矩阵列缩放后,矩阵 $A_{II}$ 的条件数的量级在  $10^{12}$ ~ $10^{17}$ 范围内。平衡处理对矩阵条件数的降低效果 明显优于矩阵列缩放,且进行单精度 HCT 仿真时也 不会遇到矩阵接近奇异值的问题,满足单精度仿真对 稳定性的需求。

级联操作由 Matlab 软件执行,基本单元块的系统矩阵通过 livelink 接口,由 COMSOL 导入 Matlab, HCT 的仿真结果如图 3 所示。经对比发现,优化后 层次级联仿真结果与器件实测导纳基本一致,这为后 续快速准确测量谐振器谐振频率随外部环境的变换 做好了铺垫。

Tab.1 Parameters of SAW resonators								
模型	波长/μm	压电材料	电极材料	IDT 指条数	电极厚度/nm	覆金比	孔径/μm	
1	2	128°YX-LN	Cu	200	170	0.5	49.2	
2	2	42°YX-LT	Al	121	160	0.55	40	
3	8.75	42°YX-LT	Al	119	680	0.6	119	
4	1.6	42°YX-LT	Al	200	154	0.5	48	

表 1 器件参数 Tab.1 Parameters of SAW resonators

表 2 FEM 矩阵 A<sub>11</sub>条件数 Tab.2 Condition number of FEM matrix A<sub>11</sub>

单元块	无预处理	列缩放	平衡处理
aIDT	$2.97 \times 10^{26}$	$2.62 \times 10^{16}$	$2.77 \times 10^{3}$
bIDT	$5.66 \times 10^{25}$	$1.64 \times 10^{16}$	$9.75 \times 10^4$
cIDT	$3.10 \times 10^{23}$	$8.59 \times 10^{12}$	$3.21 \times 10^{3}$
dIDT	$1.73 \times 10^{25}$	$4.65 \times 10^{15}$	1.31×10 <sup>5</sup>
aILDB	$6.51 \times 10^{26}$	$6.17 \times 10^{16}$	$4.99 \times 10^{7}$
bILDB	7.12×10 <sup>27</sup>	$3.90 \times 10^{17}$	$8.64 \times 10^{8}$
cILDB	$5.48 \times 10^{26}$	$1.57 \times 10^{17}$	$2.71 \times 10^{8}$
dILDB	$1.68 \times 10^{28}$	5.91×10 <sup>17</sup>	3.18×10 <sup>8</sup>



图 3 优化后模型 1~4 的 HCT 方法仿真结果 Fig.3 Simulation results of HCT method for optimized models 1-4

为了进一步展示算法在仿真速度上的改进效果, 将传统 HCT 算法仿真速度与优化后 HCT 算法仿真进 行对比,仿真所用时间如表 3 所示。电脑配置:CPU R7 5800H, 16 GB RAM。传统 HCT 算法使用双精度 数据类型对系统矩阵进行了列缩放处理,在仿真时间 的消耗上,优化后单精度 HCT 方法仿真用时减少了 50%以上。这主要是因为单精度数值的使用减小了计 算量,其次经平衡处理后系统矩阵在计算效率上略微 提升。

表 3 HCT 仿真时间消耗 Tab.3 Time consumption of HCT simulation

模型	传统 HCT 算法用时/s	优化后单精度 HCT 算法用时/s
1	2 374	969
2	1 894	658
3	4 900	2 125
4	3 167	1 225

### 4 结语

在 HCT 仿真中,针对矩阵列缩放适用性不高的 缺点,提出并采用平衡处理方法,可以显著降低矩阵 条件数,提高计算精度。其次,配合使用相对矩阵除 法稳定度更高的 LU 分解求解 Schur 补过程,适用于 边界条件为无限元域的 SAW 器件模型的单精度仿 真,避免矩阵求解时接近奇异值带来的计算误差。从 结果可知,优化后的 HCT 方法在保证精度的同时, 其仿真速度能加快 1 倍以上,为高精度 SAW 传感器 的制作起到了辅助作用。针对该算法下一步的优化方 向是提高有限元网格质量,或对预处理方法进行改 进,从而提高网格质量不高时的适应性。

#### 参考文献:

- [1] 彭丽,高姗,熊思国,等.不同预冷温度对甜樱桃果 实保鲜效果的影响[J]. 包装工程,2023,44(7): 104-114.
  PENG L, GAO S, XIONG S G, et al. Effects of Different Precooling Temperature on the Preservation of Sweet Cherry[J]. Packaging Engineering, 2023, 44(7): 104-114.
- [2] 谢佳妮,郭若楠,宾宇淇,等.不同温度对真空包装 下鲜切胡萝卜贮藏品质的影响[J].包装工程,2023, 44(9):54-61.
   XIE J N, GUO R N, BIN Y Q, et al. Effects of Different

Temperature on Storage Quality of Fresh-Cut Carrots

• 161 •

under Vacuum Packaging[J]. Packaging Engineering, 2023, 44(9): 54-61.

- [3] PLESSKY V. Coupling-of-Modes Analysis of SAW Devices[J]. International Journal of High Speed Electronics and Systems, 2000, 10(4): 867-947.
- [4] KOSKELA J, MANIADIS P, WILLEMSEN B A, et al. Hierarchical Cascading in 2D FEM Simulation of Finite SAW Devices with Periodic Block Structure[C]// 2016 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS). Tours: IEEE, 2016: 1-4.
- [5] SOLAL M, GALLAGHER M, TAJIC A. Full 3D Simulation of SAW Resonators Using Hierarchical Cascading FEM[C]// 2017 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS). Washington, DC: IEEE, 2017: 1-5.
- [6] LI X Y, BAO J F, HUANG Y L, et al. Application of Hierarchical Cascading Technique to Finite Element Method Simulation in Bulk Acoustic Wave Devices[J]. Japanese Journal of Applied Physics, 2018, 57: 07LC08.
- [7] LI X Y, BAO J F, QIU L Y, et al. 3D FEM Simulation of SAW Resonators Using Hierarchical Cascading Technique and General Purpose Graphic Processing Unit[J]. Japanese Journal of Applied Physics, 2019, 58: SGGC05.
- [8] LI X Y, BAO J F, HUANG Y L, et al. Use of Hierarchical Cascading Technique for FEM Analysis of Transverse Mode Behaviors in Surface Acoustic Wave Devices[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2019, 66(12): 1920-1926.
- [9] SUI D C, ZHANG S B, YAO H L, et al. Acceleration of Hierarchical Cascading Technique for Surface Acoustic Wave Device Simulations[C]// 2022 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS). Venice: IEEE, 2022: 1-4.
- [10] SUI D C, ZHANG S B, YAO H L, et al. Optimization of Full 3D Hierarchical Cascading Technique for Surface Acoustic Wave Device Simulations[C]// 2023 IEEE In-

ternational Ultrasonics Symposium (IUS). Montreal: IEEE, 2023: 1-4.

- [11] 赵旭鹏. 基于有限元方法的有限长声表面波器件精确 模拟[D]. 上海: 上海交通大学, 2019: 61-62.
  ZHAO X P. Accurate Simulation of Finite Length Surface Acoustic Wave Devices Based on Finite Element Method[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2019: 61-62.
- [12] HE Y W, WU T, WONG Y P, et al. Impact of Backward Waves to FEM Simulations of SAW Resonators[C]// 2022 IEEE MTT-S International Conference on Microwave Acoustics and Mechanics (IC-MAM). Munich: IEEE, 2022: 74-77.
- [13] DUFF I S, KOSTER J. On Algorithms for Permuting Large Entries to the Diagonal of a Sparse Matrix[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2001, 22(4): 973-996.
- [14] KOSKELA J, PLESSKY V, MANIADIS P, et al. Rapid
   2D FEM Simulation of Advanced SAW Devices[C]//
   2017 IEEE MTT-S International Microwave Symposium (IMS). Honololu: IEEE, 2017: 1484-1486.
- [15] KOSKELA J, PLESSKY V, WILLEMSEN B, et al. Hierarchical Cascading Algorithm for 2-D FEM Simulation of Finite SAW Devices[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2018, 65(10): 1933-1942.
- [16] WANG W B, ZHANG X D, SHUI Y A, et al. Study on the Bulk Wave Radiation of Finite-Length SAW Devices Using FEM/BEM[J]. Progress in Natural Science, 2005, 15(5): 402-406.
- [17] SHEN J Y, FU S L, SU R X, et al. SAW Filters with Excellent Temperature Stability and High Power Handling Using LiTaO<sub>3</sub>/SiC Bonded Wafers[J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 2022, 31(2): 186-193.