

# 基于物理的布料模拟研究综述

雍俊海, 陈梓苗

(清华大学 软件学院, 北京 100084)

**摘要:** **目的** 在图形硬件计算性能不断提高, 物理仿真动画技术蓬勃发展的背景下, 对基于物理的布料模拟技术中的主流方法进行总结和归纳, 指出未来发展趋势, 为相关技术与应用研究提供参考。**方法** 通过文献收集和整理, 从布料物理模型、物理模拟算法、碰撞处理算法和高分辨率加速算法等方面入手, 对基于物理的布料模拟相关研究成果进行综述, 分析现有方法的本质、优缺点和内在联系, 基于分析归纳预测其未来发展趋势和所面临的挑战。**结论** 总结归纳了布料物理模拟算法的研究进展, 研究围绕隐式时间积分无约束优化问题展开的共同点, 以及 GPU 并行加速和多重网格方法对于高分辨率布料实时模拟的贡献, 指明了布料物理模拟的发展趋势是模拟动画真实感与模拟算法高效性会得到不断提高, 其面临的挑战是随着硬件性能的发展进一步提高模拟精度, 以及在有限计算性能下需要更好地平衡模拟精度和效率的问题。

**关键词:** 计算机图形学; 物理仿真; 布料模拟; 布料动画

**中图分类号:** TB472 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2021)14-0028-12

**DOI:** 10.19554/j.cnki.1001-3563.2021.14.003

## Review of Physics-Based Cloth Simulation

YONG Jun-hai, CHEN Zi-miao

(School of Software, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**ABSTRACT:** In the context of the improvement of graphics hardware computing performance and the development of physical simulation animation technology, this paper aims to analyze and summarize the mainstream methods of physics-based cloth simulation technology, point out the future development trend, and provide a reference for related technology and application research. Through literature collection and collation, this paper summarizes the research results of cloth simulation based on physics from the aspects of cloth physical model, physical simulation algorithm, collision processing algorithm and high-resolution acceleration algorithm, analyzes the essence, advantages and disadvantages and internal relations of existing methods, and predicts its future development trend and challenges based on analysis and induction. The research progress of cloth physical simulation algorithm is summarized, the common points of the research around the implicit time integration unconstrained optimization problem are studied, as well as the contribution of GPU parallel acceleration and multigrid method to high-resolution cloth real-time simulation. It is pointed out that the development trend of cloth physical simulation is that the realism of simulation animation and the efficiency of simulation algorithm will be continuously improved, the challenge is to further improve the simulation accuracy with the development of hardware performance, and to better balance the simulation accuracy and efficiency under limited computing performance conditions.

**KEY WORDS:** computer graphics; physical simulation; cloth simulation; cloth animation

收稿日期: 2021-03-17

基金项目: 国家重点研发计划项目 (2019YFB1405703)

作者简介: 雍俊海 (1973—), 男, 福建人, 博士, 清华大学教授, 主要研究方向为计算机辅助设计。

通信作者: 陈梓苗 (1996—), 男, 广东人, 清华大学硕士生, 主攻计算机图形学与物理仿真动画。

计算机图形学起源于 20 世纪 60 年代<sup>[1]</sup>，其目标是创建有效的视觉交流，帮助人们从图形图像的角度理解事物的本质，建立起计算机与现实世界信息沟通的桥梁<sup>[2]</sup>。图形仿真是图形学的一个分支，其研究如何在计算机中模拟现实世界的场景和物体，并渲染显示在屏幕等输出设备上供人观看。图形仿真包括刚体、流体和布料等可变形物体的模拟，其中布料模拟一直是图形学仿真领域的一个重要课题。基于物理的布料模拟技术，根据经典力学规律，计算布料在任一时刻的状态，从而模拟现实世界中布料的运动和形态变化，如今已被广泛应用于动画、电影、游戏和设计等领域。近 30 年与之相关的研究工作层出不穷，这些工作为如今的布料模拟留下了宝贵的理论和技术成果。本文着重梳理布料物理模型、布料物理模拟算法、布料碰撞处理算法和高分辨率布料模拟加速算法的研究现状和重要成果，并对基于物理的布料模拟技术的发展趋势和挑战进行总结与展望。

## 1 布料物理模型

在计算机图形学中，布料物理模拟的建模方法各不相同。其中质点—弹簧模型和有限元连续体模型是最为常见的两种布料物理模型，下面将分别对这两种模型进行论述。

### 1.1 质点—弹簧模型

质点—弹簧模型将布料视为一个带约束的网格，网格的每一个顶点都是质点，被赋予一个特定的质量。布料的力学效果通过网格顶点之间添加弹簧产生相互作用力来模拟。这一模型最早由 Provot 等人<sup>[3]</sup>提出，用于四边形网格，见图 1。该模型中出现的弹簧均为无质量且遵守胡克定律的理想线性弹簧。根据弹簧在质点之间不同的连接方式可将其分为 3 类：(1) 结构弹簧，连接网格中同一行或同一列上相邻的一对质点，以维持布料的基本形状；(2) 剪切弹簧，连接网格中斜对角相邻的一对质点，防止布料在网格对角线方向发生过大的剪切形变；(3) 弯曲弹簧，连接网格中同一行或同一列上索引之差为 2 的一对质

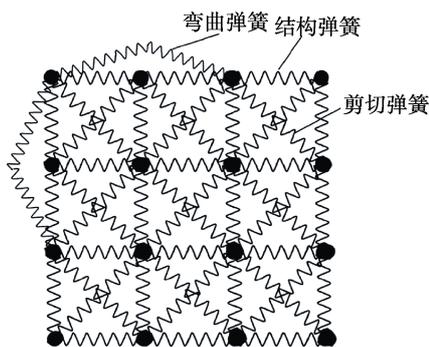


图 1 原始的质点—弹簧模型  
Fig.1 Original mass-spring model

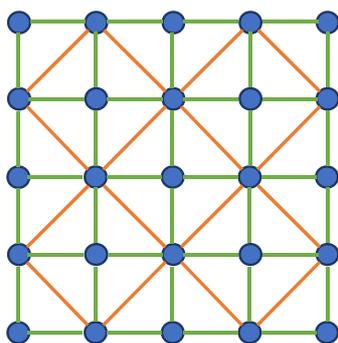


图 2 规则布料网格  
Fig.2 Regular cloth mesh

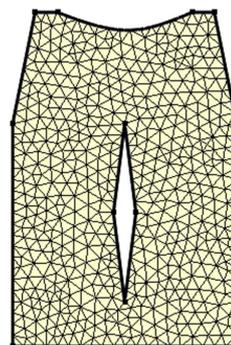


图 3 不规则布料网格  
Fig.3 Irregular cloth mesh

点，防止布料局部出现过度弯曲的现象。由于质点—弹簧模型简洁明了，而且能够较好地表达布料的力学特性，所以自出现至今一直是布料物理模拟中主流的建模方式。然而这种原始的四边形网格会因过度拉伸导致布料出现超弹性现象的问题，但经过 20 多年的发展，这一模型得到了持续的改进和完善<sup>[4-8]</sup>。现在对基于质点—弹簧模型布料模拟的研究大部分都使用约束函数的建模方法，但已不再需要显式地计算质点之间的约束力，而是采用线性近似或二次优化等方法直接求解布料质点在下一时刻应处的位置来模拟布料的运动。

现在学术界提出的布料模拟算法中多使用结构化的规则布料网格或非结构化的不规则布料网格对布料进行物理建模。其中规则网格适用于模拟旗帜和帆布等材质均匀且具有各向同性的布料；不规则网格适用于模拟服装布料等不均匀或具有各向异性的材料。在使用约束函数的模拟方法中，这两种模型通常使用两类顶点约束来替代原来的 3 种弹簧的作用，分别是边应变约束 (Edge Strain Constraint) 和弯曲约束 (Bending Constraint)。规则布料网格见图 2，不规则布料网格，见图 3。

#### 1.1.1 边应变约束

边应变约束的作用是让网格顶点尽量保持原有的距离，维持布料的结构，防止布料在外力作用下发生过大的形变。边应变约束类似于质点—弹簧模型中的两种弹簧，图 2 展示的规则布料网格中绿色的边与结构弹簧相对应，橙色的边与剪切弹簧相对应，图 3 展示的不规则布料网格则不区分这两种连接边。边应变约束函数的定义式<sup>[9]</sup>：

$$C(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| - d \quad (1)$$

其中： $x_1, x_2$  是被一个边约束关联的两个顶点的位置坐标， $d$  是布料静息状态下这两个顶点之间的距离。

#### 1.1.2 弯曲约束

弯曲约束类似于质点—弹簧模型中的弯曲弹簧，图 2 中清晰地展示了网格中有很多个由顶点和边约束构成的三角形，任意两个具有公共边的三角形称为

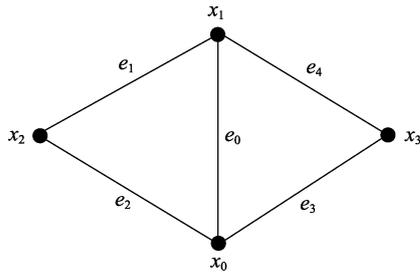


图4 等距弯曲约束模型

Fig.4 Isometric bending constraint model

相邻的三角形。布料处于静息状态时,相邻的一对三角形所成的二面角一般为  $0^\circ$ ,当布料处于运动状态时,任何一对三角形都可能以它们的公共边为轴旋转形成一个角度。弯曲约束的作用是在布料中产生一个抵抗这种弯曲的力,这个力相比于边约束产生的力通常要小很多。这里采用 Bergou M 等人<sup>[7]</sup>提出的等距弯曲约束模型,见图4。

等距弯曲约束函数的定义式:

$$C(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \{0,1,2,3\}} Q_{ij} x_i^T x_j \quad (2)$$

其中  $Q$  为局部弯曲能量 Hessian 矩阵:

$$Q = \frac{3}{A_0 + A_1} K^T K \quad (3)$$

$A_0, A_1$  为静息状态下两个相邻三角形的面积,  $K$  的定义:

$$K = (c_{01} + c_{04}, c_{02} + c_{03}, -c_{01} - c_{02}, -c_{03} - c_{04}) \quad (4)$$

其中  $c_{ij} = \cot \angle e_i, e_j$ 。

根据文献<sup>[9]</sup>中的介绍,由于多数纺织物的延展性都比较小,即不能被明显拉伸,近似符合等距弯曲约束。这里的等距指的是变形过程中网格边的长度保持不变,因此上述弯曲约束的定义适合在服装模拟等场景下应用。在约束求解过程中,公式(3)中的矩阵  $Q$  是可以预先计算得到的已知项,相比于传统的需要计算反三角函数的铰链二面角约束函数<sup>[5]</sup>而言,计算速度更快。

## 1.2 有限元连续体模型

在有限元连续体模型中,通常将布料视为连续介质,通过有限元算法将其离散化,并基于弹性力学原理进行建模。基于有限元的算法常采用三角形网格来模拟布料,与质点-弹簧模型中最小形变单元为边所不同的是,其最小形变单元为三角形,每一个三角形内部的介质连续分布,可以用一个变形梯度矩阵来描述其形变,整个布料网格的介质分段连续,通过有限元算法可以计算每个顶点受到的弹性力。这种方法可以很大程度地逼近布料真实形变的细节,从而得到高质量的模拟效果,适用于对布料模拟精度要求高的场景,较有代表性的工作有文献<sup>[10-12]</sup>。

## 2 布料物理模拟算法

图形学仿真模拟技术发展至今,布料物理模拟已经拥有了很多成熟的算法框架可供使用。综观这些不同的模拟算法,其中绝大多数都是以朴素的时间积分方法作为理论基础发展得到的,隐式时间积分、基于位置约束的动力学和投影动力学是学术界针对布料物理模拟提出,并得到广泛应用的三大主流方法。

### 2.1 时间积分方法

为布料构建网格模型后,模拟系统需要对网格上的顶点进行受力分析,然后根据经典力学计算每一个顶点的受力、加速度、速度和位置,从而实现布料的物理模拟。通常将布料网格顶点所受的力分为外力和内力:外力包括重力、风力、将网格顶点固定于某一位置所受的作用力等;内力则是网格顶点之间产生的相互作用力,由布料自身的内部约束产生,也称为应变力,如拉伸力、剪切力、弯曲力等。在基于原始质点-弹簧模型的方法<sup>[3,6,13]</sup>中,布料的内部力可以直接利用胡克定律  $F = k\Delta l$  直接计算得到,其中  $\Delta l$  为弹簧的伸长量。而在基于约束函数<sup>[5,14-16]</sup>或连续体模型<sup>[10-12]</sup>的方法中,应变力的计算相对复杂一些。完成网格顶点受力分析之后,可以通过式(5)计算顶点的加速度:

$$\ddot{q} = M^{-1}(f_{int} + f_{ext}) \quad (5)$$

式(5)中的主要物理量均以向量形式表示,设网格顶点数为  $m$ ,  $q \in \mathbb{R}^{3m}$  是网格顶点位置向量,其中  $q_i$ ,  $\ddot{q} \in \mathbb{R}^{3m}$  为网格的加速度。 $f_{int}, f_{ext} \in \mathbb{R}^{3m}$  分别为网格所受的内力和外力,一般是关于顶点位置的非线性函数。 $M \in \mathbb{R}^{3m \times 3m}$  为对角的顶点质量矩阵,  $diag(M) = (m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_m, m_m, m_m)$ 。因此式(5)是关于时间连续的偏微分方程,将其对时间积分两次即可计算得到网格顶点的位置  $q$ 。计算机中的积分计算常采用数值积分的方法,对积分变量进行离散化,以数值逼近的方法近似计算积分值。对于布料物理模拟,主流的方法是对时间变量进行离散分割,将整个模拟过程分为若干个相等的时间步 (Time Step),在每一个时间步之内,假设内力和外力不变,计算网格的加速度,然后更新网格顶点的位置,这一过程就是数值时间积分。布料物理模拟中常用的时间积分方法有显式时间积分、隐式时间积分等方法。

#### 2.1.1 显式时间积分

显式前向欧拉法是最简单的时间积分方法。在给定的时间步  $[t_n, t_{n+1}]$  内,以  $t_n$  时刻网格顶点的受力情况、速度、位置等为已知物理量,以经典力学公式向前推算出  $t_{n+1}$  时刻的速度和位置:

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + h v_{n+1} \\ v_{n+1} &= v_n + h M^{-1} f(q_n) \end{aligned} \quad (6)$$

其中： $x_n$  和  $v_n$  是已知的  $t_n$  时刻的网格顶点位置和速度， $q_{n+1}$  和  $v_{n+1}$  是要求的  $t_{n+1}$  时刻的网格位置和速度， $h = t_{n+1} - t_n$  为时间步长， $f(q_n)$  是顶点位置状态为  $q_n$  时网格所受的力。消去式(6)的中间量  $v_{n+1}$  可得：

$$q_{n+1} = q_n + hv_n + h^2 M^{-1} f(q_n) \quad (7)$$

由式(7)就可以在每一个时间步快速地更新网格的位置。虽然显式欧拉积分法易于理解和实现，但是也存在很大的不足：由于所有的计算都是基于  $t_n$  时刻的信息，忽略了真实布料非线性运动的特点，所以显式欧拉积分的精度相对较低；而且为了保证布料模拟随时间稳定地向前步进，需要使用很小的时间步长来执行前向欧拉积分步骤，如果模拟使用的时间步过大，则会看到网格顶点速度无限制地增大，出现布料网格分崩离析后从画面中消失的“能量爆炸”现象，Dinev D 等人<sup>[15]</sup>从系统能量角度分析了前向欧拉法不稳定的原因。此后出现的改进性工作有文献<sup>[17-19]</sup>。显式欧拉积分在早期的布料模拟研究中使用较多，但至今所有的显式时间积分方法都存在一个共同的问题，就是其稳定性很大程度上由时间步长的大小决定，必须选择比较小的时间步长，才能获得稳定的模拟效果，而密集的模拟计算限制了实时布料模拟下布料网格的顶点数和分辨率，因此显式时间积分不适用于实时高分辨率布料模拟的应用场景。

### 2.1.2 隐式时间积分

针对显式时间积分无法使用大步长的性能瓶颈问题，Baraff D 和 Witkin A<sup>[5]</sup>提出了隐式后向欧拉积分方法，该方法用  $t_{n+1}$  时刻未知的力  $f(q_{n+1})$  和速度  $v_{n+1}$  来建立时间步  $[t_n, t_{n+1}]$  内网格顶点的运动方程：

$$q_{n+1} = q_n + hv_{n+1} \quad (8)$$

$$v_{n+1} = v_n + hM^{-1} f(q_{n+1})$$

消去  $v_{n+1}$ ，可得：

$$M[q_{n+1} - (q_n + hv_n)] - h^2 f(q_{n+1}) = 0 \quad (9)$$

由于  $f(q_{n+1})$  是关于  $q_{n+1}$  的非线性函数，式(9)是一个非线性系统。Baraff D 和 Witkin A<sup>[5]</sup>给出了求解这一非线性系统的经典方法，将力函数  $f(q_{n+1})$  在  $q_n$  的邻域内作泰勒展开，并取一阶近似可得：

$$f(q_{n+1}) \approx f(q_n) + \nabla f(q_n)(q_{n+1} - q_n) \quad (10)$$

其中： $\nabla f = -\nabla^2 E \in \mathbb{R}^{3m \times 3m}$  是系统势能函数  $E$  的 Hessian 矩阵。将式(10)代入式(9)，则原问题被转化为一个关于  $q_{n+1}$  的线性系统，可以利用共轭梯度法等方法对所得的线性系统进行求解，从而得到下一时刻的网格顶点位置  $q_{n+1}$ 。

Liu Tian-tian 等人<sup>[13]</sup>更一般化地解释了物理模拟算法中非线性系统(9)的求解，式(9)可以转化为一个无约束非线性最优化问题。设公式中的未知量  $x = q_{n+1}$ ，已知量  $y = q_n + hv_n$ ，得到式(9)的简洁形式：

$$M(x - y) = h^2 f(x) \quad (11)$$

式(11)的解对应于以下无约束最优化问题目标函数  $g(x)$  的极点：

$$\min_x g(x) := \frac{1}{2}(x - y)^T M(x - y) + h^2 E(x) \quad (12)$$

式(11)恰好等价于  $\nabla g = 0$ ，因此非线性系统(9)的求解可以等价转化为最优化问题(12)。

在物理模拟算法中，这一非线性最优化问题通常使用牛顿迭代法 (Newton's Method) 求解。牛顿迭代法在第  $k+1$  次迭代时的基本形式：

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} - \nabla^2 g(q^{(k)})^{-1} \nabla g(q^{(k)}) \quad (13)$$

对于式(13)，令  $q^{(0)} = q_n$ ， $q_{n+1} = q^{(1)}$ ，左右两端同乘 Hessian 矩阵  $\nabla^2 g(q^{(k)}) = M - h^2 \nabla f(q^{(k)})$  即可得到式(10)代入式(9)后所得的线性系统。因此 Baraff D 和 Witkin A 所提出的经典方法本质上是只执行了一步牛顿迭代。为了保证在有限的模拟计算时间预算内获得稳定且视觉上合理的结果，使用朴素隐式时间积分的布料模拟算法，在每个时间步求解时，通常只执行单步牛顿迭代，而不管迭代是否收敛。

由于隐式欧拉积分考虑了一个时间步内网格顶点受力的变化趋势，其稳定性相比于显式欧拉积分有了显著的提高，允许使用较大的时间步长进行布料模拟。然而隐式欧拉积分也有其局限性，每次步进时都要更新每一个约束函数的 Hessian 矩阵，还要求解一个随时间不断变化的线性系统，因此朴素的隐式时间积分方法的计算效率通常比较低，同样不适用于高分辨率服装布料实时模拟的场景。其另一个缺点是约束力的近似引入了数值阻尼，导致系统能量缓慢衰减，即使没有外力影响，布料最终也会慢慢停止运动。然而由于其良好的稳定性和逼近真实物理效果的能力，隐式时间积分方法在基于物理模拟的动画应用中仍然占据重要地位<sup>[16]</sup>，最近使用隐式时间积分方法的布料模拟工作有文献<sup>[20-22]</sup>等。

## 2.2 基于位置约束的动力学算法

Müller M 等人<sup>[14]</sup>最早提出了基于位置约束的动力学算法 (Position Based Dynamics, 简称 PBD)。与基于力学的经典模拟算法不同的是，这种方法忽略速度层，直接计算网格顶点位置的改变，它使用几何约束来描述布料的非线性特性，以此模拟布料内部的弹力。PBD 求解器采用一种类似高斯-赛德尔法的迭代方式，在每一次迭代中逐个处理所有的约束，每次都对网格顶点施加一个位置修正量来使当前约束得到满足（这一过程称为约束投影），从而降低式(12)中目标函数  $g(x)$  的值。设系统中的任意一个约束方程为  $C(q) = 0$ ，在每一个时间步，模拟算法需要对于给定的网格顶点位置  $q$ （通常为不考虑内部约束力作用计算得到的顶点新位置），计算得到一个位置修正量

$\Delta q$ , 使得  $C(q+\Delta q)=0$  成立。将  $C(q+\Delta q)$  在  $q$  的邻域内展开并取一阶近似可得:

$$C(q+\Delta q) \approx C(q) + \nabla C(q)^T \Delta q = 0 \quad (14)$$

为了保证位置修正前后系统的动量和角动量保持不变, PBD 方法取位置修正量为  $\Delta q = \lambda M^{-1} \nabla C(q)$ , 即对于第  $i$  个顶点有:

$$\Delta q_i = -\lambda w_i \nabla_{q_i} C(q) \quad (15)$$

$$\text{其中: 拉格朗日乘数 } \lambda = \frac{C(q)}{\sum_j w_j \|\nabla_{q_j} C(q)\|^2},$$

$$w_i = \frac{1}{m_i}。$$

PBD 算法提出了一种新的模拟思路, 该方法可以直接控制时间积分的过程, 从而避免显式积分方法中出现的过冲和能量增加问题, 使得模拟具有更强的鲁棒性。PBD 算法还进一步提高了布料模拟的效率, 能够实时模拟三角面片数在千级别的布料, 被广泛应用于游戏和虚拟现实等对实时性要求较高的场景中。由于 PBD 算法对系统约束逐一投影来进行求解, 其对系统约束动态增删的支持性较好, 但其缺点是求解过程中网格顶点在不同约束的目标位置之间跳跃, 约束投影的顺序可能会影响求解结果, 而且模拟得到的材质特性很大程度上取决于迭代次数和时间步长, 单位时间内迭代次数越小, 则求解迭代终止时的系统状态离收敛点越远, 使布料材质看起来弹性更大。Macklin M 等人<sup>[23]</sup>扩展得到的 XPBD 算法解决了模拟材料的刚度依赖于迭代次数和时间步长的问题, 但这种算法在取近似的过程中略去了约束函数的 Hessian 矩阵, 引入了关于时间的二阶误差项, 导致在采用较大时间步长的实时模拟中可能会出现较大的误差, 因此在需要保留较多细节的实时布料模拟场景下, PBD 类算法可能不是最佳选择。

### 2.3 投影动力学算法

对于原始的质点—弹簧布料模型(见图1), Liu Tian-tian 等人<sup>[13]</sup>引入了一个辅助变量, 将弹簧弹性势能转化为一个无约束最优化问题的形式, 并通过数学推导证明了能量函数  $E(x)$  是关于顶点位置  $x$  的二次函数, 其系统矩阵对称正定且在模拟过程中恒定不变, 可以对其进行 Cholesky 预分解, 每次求解(12)的极点条件时只需花费线性时间计算方程组的右端, 再解两个上、下三角线性方程组即可。这一模型在布料模拟的效率上相比于此前的方法优势明显, 只需要进行少量的求解迭代就能得到视觉合理的效果, 在国内的研究中也被使用, 如余方妹等人<sup>[24]</sup>、万燕等人<sup>[25]</sup>。然而这种方法仅适用于质点—弹簧系统, 并且假设所有弹簧都是满足胡克定律的线性弹簧, 具有较大的局限性。

Bouaziz S 等人<sup>[16]</sup>将 Liu Tian-tian 等人<sup>[13]</sup>的工作

进一步推广, 提出了投影动力学 (Projective Dynamics) 算法。将力函数分解为  $f(q_{n+1}) = f_{\text{int}}(q_{n+1}) + f_{\text{ext}}$ , 网格受到的外力  $f_{\text{ext}}$  在一个时间步之内可视为常量, 系统内力  $f_{\text{int}}(q)$  可视为保守力, 即有  $f_{\text{int}}(q) = -\sum_i \nabla W_i(q)$ , 其中  $W_i(q)$  是一个标量势能函数, 式(12)等价于以下关于  $q_{n+1}$  的优化问题:

$$\min_{q_{n+1}} \frac{1}{2h^2} \|M^{\frac{1}{2}}(q_{n+1} - s_n)\|_F^2 + \sum_i W_i(q_{n+1}) \quad (16)$$

其中:  $s_n = q_n + hv_n + h^2 M^{-1} f_{\text{ext}}$ ,  $\|\cdot\|_F$  表示 Frobenius 范数。式(16)中的第一项的物理意义是动量势 (Momentum Potential), 这一项表明所得的解应该遵循系统自身惯性和外力的影响, 第二项表示系统内部约束产生的弹性势能, 因此式(16)表明这一优化问题的解是在最小化系统的动量势和弹性势能之间取一个折中的方案。对于式(16)中的弹性势能项, 投影动力学中提出了二次投影距离度量公式来对其进行建模:

$$W(q, p) = \frac{w}{2} \|Aq - Bp\|_F^2 + \delta_c(p) \quad (17)$$

其中  $p \in \mathbb{R}^{m \times 3}$  为辅助变量,  $\delta_c(p)$  为约束流形  $C(p)=0$  的示性函数:

$$\delta_c(p) = \begin{cases} 0, & C(p) = 0 \\ +\infty, & \text{other} \end{cases} \quad (18)$$

弹性势能定义为  $\tilde{W}(q) = \min_p W(q, p)$ , 其几何意义是在约束流形  $C(p)=0$  上找一点  $p$ , 使得  $q, p$  之间的二次投影距离项  $\frac{w}{2} \|Aq - Bp\|_F^2$  的值最小, 令这个最小距离等于系统状态为  $q$  时的弹性势能。其中  $A, B$  是常量矩阵, 由具体的约束投影定义决定, 文献[16]中介绍了从连续体能量公式导出一些常见约束的  $A, B$  矩阵的方法。  $w$  是一个非负的权值, 权值越大的约束在求解时被满足的程度越高。约束方程组  $C(p)=0$  可以包含任意类型的等式约束, 如布料网格中的拉伸和弯曲约束、四面体网格中的体积约束等。

下面默认讨论  $t_n$  时刻的隐式求解问题, 略去未知量  $q_{n+1}$  的下标。利用式(17)可以把式(16)中定义的隐式时间积分的系统能量最小化问题的目标函数重写:

$$\frac{1}{2h^2} \|M^{\frac{1}{2}}(q - s_n)\|_F^2 + \sum_i \frac{w_i}{2} \|A_i S_i q - B_i p_i\|_F^2 + \delta_c(p_i) \quad (19)$$

式(19)是关于  $q$  和辅助变量  $p_i$  的最小化问题, 其中  $S_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  是一个常量选择矩阵, 其元素全部为 0 或 1, 用于选取被第  $i$  个约束关联的所有顶点。投影动力学算法使用局部/全局交替最小化的方法来最小化式(19)。

局部求解：这一步又被称为约束投影 (Constraint Projection)。首先固定顶点位置  $q$ ，在辅助变量  $p_i$  上最小化式(19)。由于每一个约束  $C_i$  都有自己的辅助变量  $p_i$ ，不同约束的辅助变量互不影响，因此可以分别对每一个约束  $C_i$  最小化：

$$\min_{p_i} \frac{w_i}{2} \|A_i S_i q - B_i p_i\|_F^2 + \delta_{C_i}(p_i) \quad (20)$$

这使得局部求解步骤可以大规模并行执行。

全局求解：然后固定辅助变量  $p_i$ ，在顶点位置  $q$  上最小化式(19)。将  $p_i$  视为已知量，则式(19)是关于未知量  $q$  的二次函数，因此可以通过一步线性求解将其最小化。由驻点处梯度等于 0 可以得到线性系统：

$$\left( \frac{M}{h^2} + \sum_i w_i S_i^T A_i^T A_i S_i \right) q = \frac{M}{h^2} s_n + \sum_i w_i S_i^T A_i^T B_i p_i \quad (21)$$

系统矩阵  $\frac{M}{h^2} + \sum_i w_i S_i^T A_i^T A_i S_i$  为对称正定矩阵，而

且如果系统的约束不发生改变，它就是常量矩阵。因此可以在初始化对其进行 Cholesky 分解 (即 LLT 分解或 LDLT 分解)，只需在局部求解步骤更新完投影变量之后，重新计算式(21)的右端项，这样全局求解就可以在  $O(n)$  时间内完成，其中  $n$  为约束方程的个数。对此式(12)可知投影动力学通过二次投影距离对内部约束产生的弹性势能进行建模，将势能函数的 Hessian 矩阵  $\nabla^2 E$  变成了恒定的正定矩阵  $\sum_i w_i S_i^T A_i^T A_i S_i$ ，因此可以使用矩阵预分解使系统求解的计算量相比于牛顿法显著降低。

投影动力学算法具有以下优点：高效，局部求解阶段可以按约束高度并行化，全局求解可以通过矩阵预分解实现线性时间内求解；稳定，最小化问题的目标函数(19)具有下界，而且局部/全局求解过程使目标函数保持下降，必定收敛，在迭代次数足够多时会收敛到隐式欧拉方法的精确解；模拟材料的刚度表现与求解迭代次数相关性较低，由于投影动力学中考虑了动量势，即式(16)和式(19)中的第一项，很大程度上降低了模拟材料的刚度对求解迭代次数的依赖。

投影动力学算法的一个缺点是对系统约束动态增删的支持较差，每次添加和移除约束时都需要对系统矩阵  $\frac{M}{h^2} + \sum_i w_i S_i^T A_i^T A_i S_i$  重新进行一次 Cholesky 分解，导致计算效率下降，典型的例子是通过增加和移除约束来处理碰撞的场景。其另一个缺点是全局求解步骤中求解上、下三角方程组的变量替换过程需要顺序执行，难以直接实现并行加速。Bouaziz S 等人<sup>[16]</sup>利用投影动力学模拟的窗帘，见图 5。

## 2.4 其他方法

Liu Tian-tian 等人<sup>[26]</sup>提出了一种使用 L-BFGS 加速的拟牛顿法求解器，这种算法相比于牛顿法对隐式

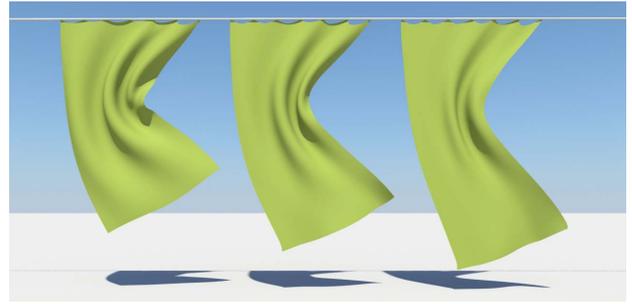


图 5 投影动力学模拟的窗帘  
Fig.5 Curtains simulated by projective dynamics

欧拉时间积分的求解，效率上有大幅提升，相比于 PBD 和投影动力学算法，能够支持更多超弹性材料的模拟，而且能够得到更真实的效果。Narain R 等人<sup>[27]</sup>提出了以交替方向乘子法 (Alternating Direction Method of Multipliers, 简称 ADMM) 来优化式(12)的算法，并证明了投影动力学算法是该算法的一种情况，这种算法相比于投影动力学算法有所改进，能够支持非线性弹性材料和硬约束。Dinev D 等人<sup>[28]</sup>提出了 FEPR 快速能量投影法，这一算法可以修正可变形体模拟过程中系统能量波动的问题，可跟 PBD 或投影动力学结合使用以获得细节更丰富的模拟效果。相比于前面提及的模拟算法，这些算法与 GPU 并行加速算法结合使用的复杂程度较高。

## 3 布料碰撞处理算法

布料的碰撞处理主要分为碰撞检测和碰撞求解两大部分：碰撞检测指对场景中的物体进行几何求交计算，返回每一对发生碰撞的物体的相关信息；碰撞求解指根据运动学规律等知识计算出物体参与碰撞后的物理状态，使其在模拟中表现出真实自然的碰撞响应行为。碰撞检测算法属于几何求交的范畴，本文仅列举近年来的一些主流算法，如自适应的层次化符号向量场法<sup>[29]</sup>、层次包围盒碰撞剔除算法<sup>[30]</sup>和基于空间哈希和法向锥测试的自碰撞剔除算法<sup>[22,31-33]</sup>。需要强调的是，在复杂的碰撞场景中，碰撞检测可占用模拟总耗时的 50% 以上，其中大部分时间用于布料自碰撞的检测，因此布料碰撞检测算法的优化对于布料模拟效率的提高具有重要意义。下面对布料碰撞求解相关的研究情况进行论述。

Li Jie 等人<sup>[20]</sup>提出了一种基于自适应网格布料模拟的隐式摩擦碰撞求解器，这是学术界第一个能够精确模拟布料碰撞产生的库仑摩擦力的算法，它可以同时处理布料自碰撞和布料与角色身体之间的碰撞，相比于以前的算法极大地提高了布料碰撞和摩擦效果的真实性和鲁棒性。吕梦雅等人<sup>[34]</sup>针对这种算法在大时间步长下会忽略掉一些碰撞的问题进行了改进，增强了模拟的鲁棒性。这类算法可以得到比较逼真的模拟效果，但由于其模拟计算基于隐式欧拉积分和牛顿法进行

实现,时间开销太大。文献<sup>[20]</sup>中提供的人体着装示例动画需要运行程序 5~20 h 才能生成完毕,因此上述算法只能支持离线模拟的应用场景。

针对投影动力学算法框架, Bouaziz S 等人<sup>[16]</sup>给出了隐式处理碰撞的方案,即在碰撞检测之后,为每一个碰撞对添加新的弹性约束,这种约束会将布料网格顶点拉回到碰撞接触平面上,类似于一个排斥弹簧。处理碰撞反弹和摩擦的方法则和 PBD 相似,即以直接修改碰撞顶点的速度来体现。这样的处理方法存在 3 个方面局限性:(1)增减约束会改变全局步骤的系统矩阵,每次改变时都需要重新进行矩阵分解,降低了求解效率;(2)碰撞约束往往需要设置较大的权重来优先满足,因此添加碰撞约束时,系统中所有约束的权值  $w_j$  都需要重新调节,进而得到一个合理的结果;(3)难以在保持模拟鲁棒性的同时对系统施加真实计算得到的摩擦力。在投影动力学中,另一种简单处理碰撞的方法是两阶段方法,即在一个单独的后处理步骤中直接把碰撞穿透的顶点投影平移到合法的位置以解决碰撞问题。该方法在 Liu Tian-tian 等人<sup>[13]</sup>的算法实现中被使用,虽然这种方法计算量小,但是忽略了模拟物体的惯性和摩擦。

最近 Ly M 等人<sup>[35]</sup>基于文献<sup>[20]</sup>的工作提出了一种新算法。该算法以半隐式的方式将接触力和干摩擦力集成到投影动力学算法中,在局部求解过程中对碰撞接触力进行可并行化的迭代计算,仍然保持全局步骤的系统矩阵不变,从而保留了投影动力学算法的高效性,并且使得布料的碰撞接触和摩擦更接近于真实效果。其不足之处是这一算法需要使用较小的时间步长(2~5 ms)以防止碰撞穿透出现,如此密集的碰撞检测和模拟求解运算显然不适合实时模拟。另外,此算法求解迭代次数过少时,参与碰撞的布料会表现出不停振荡的不稳定现象。文献<sup>[20]</sup>仅实现了 CPU 并行的程序,在顶点数为 53 000 个的服装模拟示例中碰撞检测和迭代求解耗时均超过 600 ms,需要与 GPU 并行加速算法相结合才能达到高分辨率布料实时模拟的性能要求。

## 4 高分辨率布料模拟的加速算法

近几年来,基于物理的布料模拟技术在虚拟试衣<sup>[36-37]</sup>和服装设计<sup>[38-39]</sup>等场景下的应用越来越广泛。这类应用场景的共同点是需要对服装布料进行实时模拟,因此对基于物理的布料模拟提出了更高的要求,即要求系统能够快速高效地计算并生成效果逼真的布料模拟动画。布料网格的分辨率与单位长度或面积内的顶点数或三角面片数呈正相关。布料模拟的质量由布料网格的分辨率和模拟算法的精度共同决定。如果布料模拟中使用的网格分辨率过低,单个三角形的面积过大,由于三角形内部不能弯曲,将导致布料

局部细小褶皱等细节信息丢失。另一方面,模拟算法的精度指的是其在一个时间步长中对非线性问题(12)的求解精度,实时模拟要求模拟算法在一个时间步长之内返回计算结果以保证动画帧率,如果算法效率不够高,在求解收敛之前就终止迭代返回结果,将会导致模拟计算出现较大的误差,使布料出现过度拉伸等不合理现象。要得到高质量的布料模拟动画,就要求模拟算法对于高分辨率的布料网格依然能够保证模拟计算的效率和精度。因此如何在有限的硬件计算性能下对高分辨率布料模拟算法进行加速这一问题,具有重要的研究意义。

### 4.1 布料模拟的 GPU 并行加速

原始 PBD 算法采用高斯—赛德尔模式来处理约束,即每对一个约束执行投影操作后,立即更新其关联的网格顶点的位置。而在并行化的实现中,约束在多个线程上并行处理,如果由两个不同线程处理的两个约束对同一个顶点产生影响,将导致计算结果不可预测。为了避免竞争条件的出现,它们不能同时更新这一顶点的位置。对此, Fratarcangeli M 等人<sup>[40]</sup>和陈申华<sup>[41]</sup>使用图着色法对约束集进行了划分,得到的每一个子集中任意两个约束都不存在共同关联的顶点,对每一个子集中的约束投影并行化处理,子集之间顺序执行,即可避免求解过程中出现竞争条件,使得以 GPU 并行计算的方式来实现 PBD 算法成为可能,从而大幅提高其模拟效率。这类方法在学术界相关文献中也被称为并行高斯—赛德尔(Parallel Gauss-Seidel)方法。

投影动力学分为局部求解和全局求解两个阶段:在局部求解阶段,每个约束计算投影点的过程很容易高度并行化;而全局求解阶段,使用直接方法解上、下三角线性方程组的前向和后向代入过程难以并行实现。针对这一问题,Wang Hua-min<sup>[42]</sup>的工作给出将全局求解阶段的直接求解替换为对该方程组的一步雅可比(Jacobi)迭代,并使用切比雪夫半迭代法加速雅可比迭代收敛的方法。这种算法的 GPU 实现表现优异,能够实时模拟三角面片数和约束数为数万级别的弹性体、布料和人体服装等模型,切夫雪夫半迭代法的连衣裙模拟见图 6。虽然迭代方法并不会对全局步骤的线性系统进行非常精确的求解,但是它能使频率较高的局部约束得到投影计算。在对高分辨率布料网格进行模拟时,相比于原始 CPU 实现<sup>[16]</sup>能更快速高效地得到高质量的解,因此其模拟得到的布料动画效果相比于原始实现更加真实自然。

Fratarcangeli M 等人<sup>[43]</sup>以文献<sup>[40]</sup>的工作为基础进一步研究了以 GPU 并行化的高斯—赛德尔迭代法来求解投影动力学问题的算法,他们选出了颜色数较少且执行效率高的一种图着色算法用于约束集划分。通过对比实验,发现在物理模拟求解时间限制



图 6 切夫雪夫半迭代法的连衣裙模拟

Fig.6 Dress simulated by chebyshev semi-iterative approach

比较严格（如一帧求解时间限制为 8 ms）的情况下，并行化高斯—赛德尔迭代法比 Wang Hua-min<sup>[42]</sup>提出的并行化雅可比法的稳定性表现明显更加优秀，这是因为对同一个正定线性系统的求解，高斯—赛德尔迭代法通常能够获得比雅可比法更好的收敛性能。因此这种算法可以用于模拟计算时间限制较为严格的实时布料模拟场景。

#### 4.2 基于多重网格的布料模拟

以上所提及的方法都是基于单分辨率网格的布料模拟算法，即在求解过程中，只有被同一约束关联的两个顶点之间才能够直接传递物理状态信息。高分辨率布料网格的顶点数规模较大，当一个局部受到外力影响发生形变时，该形变相关的信息需要经过很多顶点才能传递到远处的顶点。因此当采用迭代求解方法对更高分辨率的布料网格进行模拟时，求解器的收敛速率将明显下降，在实时模拟中网格分辨率高到一定水平，求解器就需要在迭代收敛之前返回计算结果，由于高频误差在前几次迭代中可以被迅速剔除，此时系统中只留下了低频误差。单分辨率网格存在一个明显的局限性，就是低频误差需要经过更多的迭代才能消除。多重网格（Multigrid）方法能够很好地解决这一问题，这种方法为布料网格建立了一个多分辨率的网格层级，每一级网格的分辨率都不同，最底层的原始的布料网格是最精细的一级，自底向上网格分辨率逐级降低。多重网格具有一个重要特性，即精细层级网格中的低频误差在粗糙层级网格中表现为高频误差，这一特性使得求解器在粗糙网格中快速平滑低频误差成为可能，利用这一特性可以对高分辨率布料模拟进行加速。典型的多重网格方法通常由四个部分组成<sup>[44]</sup>：平滑操作（Smoothing），即执行迭代求解方法；下采样（Restriction），对高分辨率层级中的问题进行下采样得到低分辨率层级中的子问题；插值（Interpolation），将低分辨率层级的求解结果通过插值变换到高分辨率层级中；精确求解器，用于在低分辨率层级上精确求解子问题。这四部分在多重网格层级中被组织成 V-cycle 结构，见图 7，图中实心点表

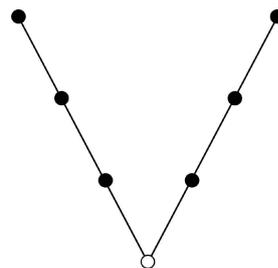


图 7 多重网格的 V-cycle 结构

Fig.7 V-cycle structure of multigrid

示平滑操作，空心点表示精确求解，右斜线“\”表示下采样操作，左斜线“/”表示插值操作。对于基于多重网格的布料模拟，按照提出时间的顺序对三种比较有代表性的算法进行论述。

作为 PBD 算法的提出者，Müller M<sup>[45]</sup>提出了基于多重网格的层次化 PBD 算法（Hierarchical Position Based Dynamics），这一算法显著提高了 PBD 算法在高分辨率网格上的收敛速度。其基本思想是通过多重网格方法在低分辨率层级上运行 PBD 迭代求解，然后把顶点位置修正量插值之后用于修改高分辨率层级的顶点位置，得到高分辨率问题的初始值。层次化 PBD 的多重网格结构见图 8，图中展示了第  $l$  级网格包含的所有顶点（白点和黑点）和约束（虚线），以及下一个更粗糙的第  $l+1$  级包含的顶点子集（白点）和约束（实线）。每个白色顶点在第  $l$  级需要连接到至少  $k$  个黑色顶点（称为其父顶点，Parent），图中  $k=2$ 。第  $l$  级 PBD 问题的顶点初始位置，由其父顶点在第  $l+1$  级求解的修正量插值，并应用到自身位置上得到，距离顶点越近的父顶点在插值时权值越大。层次化 PBD 和原始 PBD 的布料模拟效果对比见图 9，展示了多重网格方法对 PBD 算法收敛速度的影响。示例中模拟的布料网格由 11 500 个三角面片组成，最左边的图对应于使用多重网格求解的层次化 PBD 算法，它在原始网格层级上仅执行两次对称的 PBD 迭代，模拟帧率可达 60 fps，右边的四张图分别对应于原始 PBD 算法迭代次数为 2、5、10 和 20 的模拟效果，只有执行 20 次 PBD 迭代才能得到与多重网格算法相当的布料拉伸刚度表现，但过多的全局迭代次数会使得模拟性能显著下降，帧率下降到 12 fps。可见多重网格方法的引入能够显著加快 PBD 算法在高分辨率网格上的收敛速度，使其高分辨率布料模拟的效率和质量得到有效提高。层次 PBD 算法作为多重网格方法应用于物理模拟的早期尝试，存在一些局限性，例如求解过程中只完成了一次从低分辨率网格向高分辨率网格（即只有图 7 中 V-cycle 自底向上的右半部分）的系统误差平滑传递，没有自顶向下的误差平滑操作，限制了算法能够取得的模拟精度。

Wang Zhen-dong 等人<sup>[21,44]</sup>针对非结构化高分辨率布料网格模拟中的非线性问题提出了一种创新性

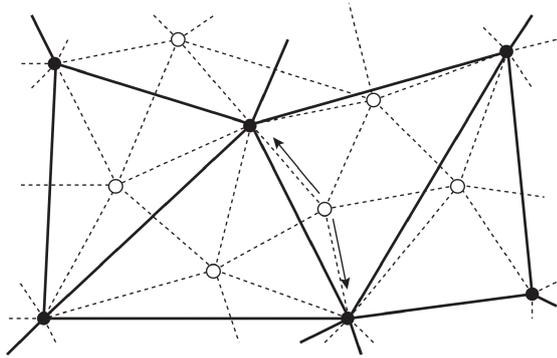


图8 层次化 PBD 的多重网格结构  
Fig.8 Multigrid structure of hierarchical PBD

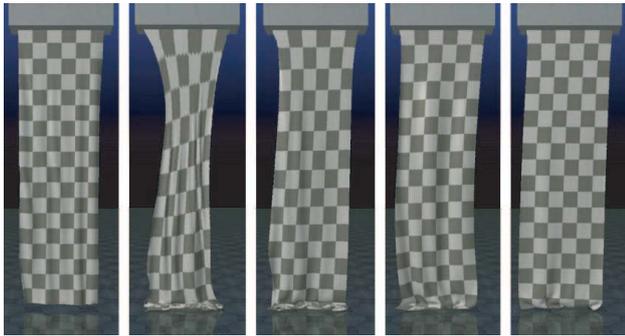


图9 层次化 PBD 和原始 PBD 的布料模拟效果对比  
Fig.9 Comparison between hierarchical PBD and original PBD on cloth simulation

的求解算法框架,该算法框架被称为非线性完整多重网格 (Nonlinear Full Multigrid, 简称 Nonlinear FMG) 算法。完整多重网格结构见图 10, 图中 “\” 和 “/” 分别表示下采样和插值操作, “//” 表示高阶插值操作, 实心点表示平滑操作 (迭代求解), 空心点表示精确求解。“/” 的插值矩阵  $I_{h+1}^h$  采用重心坐标计算得到, 下采样矩阵  $I_h^{h+1}$  直接使用 Galerkin 条件  $I_h^{h+1} = (I_{h+1}^h)^T$  计算得到, 从而避免几何下采样导致低分辨率层级的布料网格中存在不符合物理规律的弯曲阻力的问题。与基于牛顿法的多重网格方法不同的是, 该算法在一次求解过程中会动态更新第  $h$  层的线性系统  $A_h c_h = r_h$ , 这使得系统能够更加逼近布料的非线性特性。该算法首次提出在多重网格结构上混合使用大小不同的 V-cycle 的策略, 给出了兼顾模拟精度和性能的系统矩阵和残差更新策略, 结合基于 GPU 并行的自适应平滑操作实现跳过残差很小的变量, 将计算性能集中在网格精度较低的区域, 使平滑操作减少 30% 的耗时。非线性 FMG 算法能够有效提高牛顿法的收敛速度, 并且很容易集成到投影动力学算法中, 从而得到 FMG 对投影动力学算法的加速效果, 见图 11。第一行的布料网格拥有 10 000 个顶点, 第二行的网格拥有 40 000 个顶点。可见非线性 FMG 算法对较高分辨率布料模拟的加速表现优异, 对于较低分辨率的布料模拟它可能不是最优选择。

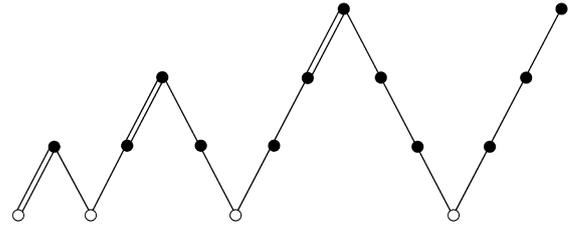


图 10 完整多重网格结构  
Fig.10 Full multigrid structure



图 11 FMG 对投影动力学算法的加速效果  
Fig.11 Accelerated projective dynamics by FMG

最近, Xian Zang-yue-yang 等人<sup>[46]</sup>对多重网格方法在高分辨率可变形体实时模拟的应用上做了进一步的工作。这项工作对数学中的 Galerkin 多重网格方法针对物理模拟的应用场景进行了改进。作者观察到增加每个低分辨率网格节点的自由度, 比增加节点数量对于提高多重网格的收敛性更为有效。因此在除原始网格以外的低分辨率层级上, 每个节点都使用具有 12 个自由度的蒙皮空间坐标, 蒙皮空间坐标的使用使得低分辨率层级网格的分辨率能够更大程度地降低。这项工作插值操作上使用 0~1 权重来保证各层级线性系统矩阵的稀疏性, 并论证了这种简单的分段常数权值产生的高频误差可以在几次迭代中快速消除, 提出的算法能够与牛顿法和投影动力学算法结合使用。这种算法支持附着和碰撞两种动态约束, 其 GPU 并行实现的程序在额外消耗 13.4 s 预计算时间的前提下, 能够以 31.5 fps 的帧率对含有 375 000 个三角面片的布料进行实时模拟, 这一算法进一步提高了布料实时模拟能够达到的最高分辨率。

### 5 布料物理模拟的发展趋势和挑战

基于物理的布料模拟技术的发展趋势可以概括

为两点：一是布料物理模拟动画的真实感逐渐提高；二是布料物理模拟算法的计算效率不断提升。

### 5.1 布料模拟动画的真实感

布料模拟动画的真实程度主要由布料物理建模和模拟器对物理问题的求解精度两方面的因素决定。从质点—弹簧模型的演变可以看出，在布料物理模型的不断演变过程中，最初的质点—弹簧模型中的弹簧都是遵守胡克定律的线性弹簧，布料的拉伸、剪切和弯曲特性都以线性弹簧来进行建模，模拟得到的布料动画与真实布料之间存在较大的差异。此后，布料的内部作用力改为从边应变约束和弯曲约束函数中导出，这使得物理模型能够体现布料材质的非线性特性。在模拟器求解精度方面，学术界不断改进模拟算法，从显式时间积分到隐式时间积分，从假定布料内部力在一个时间步内不变到将其视为网格顶点位置的非线性函数来进行处理，碰撞检测算法的精确度不断提高，碰撞求解算法逐渐能够精确计算碰撞产生的库仑摩擦力，这些进展使得布料物理模拟动画能够产生越来越逼近真实布料的效果。

### 5.2 布料模拟算法的高效性

布料模拟的计算速度主要由碰撞检测、响应和动力学方程求解的耗时决定。隐式时间积分导出了一个无约束非线性最优化问题，早期的模拟算法直接使用牛顿法对其进行求解，但时变的系统矩阵极大地限制了求解效率；PBD 算法提出了约束投影和高斯—赛德尔迭代式的方法来加速求解；投影动力学算法则通过约束投影距离代替弹性势能项，使得系统矩阵成为一个恒定的正定矩阵，通过约束投影并行化和矩阵预分解大幅提高求解效率；多重网格方法使迭代求解器在高分辨率布料网格上获得更好的收敛性能。以上都是学术界在布料物理模拟领域寻求高效的近似算法所得到的成果和突破。另外，图形硬件计算性能的不断发展为高分辨率布料模拟提供了新的思路，GPU 并行加速方法被成功结合到 PBD 和投影动力学等经典模拟算法上，使布料实时模拟能够达到的最高分辨率得到突破性进展。

布料模拟算法的精度和稳定性很大程度上决定了实时布料模拟能够达到的帧率，另一方面，布料模拟算法的效率很大程度上决定了实时布料模拟能够达到的最高分辨率，而布料网格分辨率决定了模拟布料运动细节的丰富程度和真实感，由此可见上述两点是相辅相成的。结合相关研究可以预测，随着图形硬件计算性能的发展，提高物理模型对布料行为特性的表现力和模拟算法的求解效率，进一步增强布料模拟动画的真实感，以及在计算性能有限的场景下，在布料模拟动画的真实程度和模拟效率之间寻找更优的平衡方案，仍然是亟待研究和解决的问题。

## 6 结语

本文从布料物理模型、物理模拟算法、碰撞处理算法和高分辨率加速算法这四个角度出发，对基于物理的布料模拟技术相关研究情况进行了综述，总结出布料模拟真实感逐渐提高、模拟算法效率不断提升的两大趋势，并预测了未来布料物理模拟研究将要面临的挑战。在图形学界众多专家学者的努力下，基于物理的布料模拟技术得到了长足的发展并日趋成熟。如今布料模拟技术有着广阔的应用场景，例如动画、影视、服装设计和虚拟试衣等，这些领域的发展会对布料模拟技术提出新的要求，同时计算机图形软硬件的发展也将为布料模拟技术研究赋予新的动能，这两大因素都将推动布料物理模拟技术不断向前发展。

### 参考文献：

- [1] 张策. 机械工程简史[M]. 北京：清华大学出版社，2015.  
ZHANG Ce. A Brief History of Mechanical Engineering[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2015.
- [2] 徐文鹏. 计算机图形学基础(OpenGL 版)[M]. 北京：清华大学出版社，2014.  
XU Wen-peng. Fundamentals of Computer Graphics(OpenGL Version)[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2014.
- [3] PROVOT X. Deformation Constraints in a Mass-spring Model to Describe Rigid Cloth Behaviour[J]. Graphics Interface, 1995: 147-154.
- [4] VOLINO P, THALMANN N M. Developing Simulation Techniques for an Interactive Clothing System[C]. Geneva: Proceedings of International Conference on Virtual Systems and Multi-Media VSMM'97, 1997.
- [5] BARAFF D, WITKIN A. Large Steps in Cloth Simulation[C]. HiroshiGlas: the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1998.
- [6] CHOI K J, KO H S. Stable but Responsive Cloth[C]. Los Angeles: ACM SIGGRAPH 2005 Courses, 2005.
- [7] BERGOU M, WARDETZKY M, HARMON D, et al. A Quadratic Bending Model for Inextensible Surfaces[C]. Cagliari: Symposium on Geometry Processing, 2006.
- [8] 吕梦雅, 李发明, 唐勇, 等. 基于弹簧质点模型的快速逼真的布料模拟仿真[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(16): 36-40.  
LYU Meng-ya, LI Fa-ming, TANG Yong, et al. Fast and Realistic Cloth Simulation Based on Mass-spring Model[J]. Journal of System Simulation, 2009, 21(16): 36-40.
- [9] BENDER J, MÜLLER M, MACKLIN M. A Survey on Position Based Dynamics[J]. Proceedings of the European Association for Computer Graphics: Tutorials, 2017: 1-31.
- [10] WANG Hua-min, O'BRIEN J F, RAMAMOORTHI R.

- Data-Driven Elastic Models for Cloth: Modeling and Measurement[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2011, 30(4): 1-12.
- [11] NARAIN R, SAMII A, O'BRIEN J F. Adaptive Anisotropic Remeshing for Cloth Simulation[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2012, 31(6): 1-10.
- [12] KIM T. A Finite Element Formulation of Baraff-Witkin Cloth[J]. *Computer Graphics Forum*, 2020, 39(8): 171-179.
- [13] LIU Tian-tian, BARGTEIL A W, O'BRIEN J F, et al. Fast Simulation of Mass-Spring Systems[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2013, 32(6): 1-7.
- [14] MÜLLER M, HEIDELBERGER B, HENNIX M, et al. Position Based Dynamics[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2007, 18(2): 109-118.
- [15] DINEV D, LIU Tian-tian, KAVAN L. Stabilizing Integrators for Real-Time Physics[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2018, 37(1): 1-19.
- [16] BOUAZIZ S, MARTIN S, LIU Tian-tian, et al. Projective Dynamics: Fusing Constraint Projections for Fast Simulation[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2014, 33(4): 1-11.
- [17] VOLINO P, MAGNENAT-THALMANN N. Implicit Midpoint Integration and Adaptive Damping for Efficient Cloth Simulation[J]. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2005, 16(3-4): 163-175.
- [18] EBERHARDT B, WEBER A, STRASSER W. A Fast, Flexible, Particle-System Model for Cloth Draping[J]. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 1996, 16(5): 52-59.
- [19] ZELLER C. Cloth Simulation on the GPU[C]. *New York: ACM SIGGRAPH 2005 Sketches*, 2005.
- [20] LI Jie, DAVIET G, NARAIN R, et al. An Implicit Frictional Contact Solver for Adaptive cloth Simulation[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2018, 37(4): 1-15.
- [21] 王振东. 基于物理的布料仿真中若干问题研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2018.  
WANG Zhen-dong. Research on Physics-based Cloth Simulation[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2018.
- [22] 王彤彤. 基于物理的布料仿真中碰撞处理算法的研究与实现[D]. 杭州: 浙江大学, 2019.  
WANG Tong-tong. Research and Implementation on Collision Handling for Physically-based Cloth Simulation[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2019.
- [23] MACKLIN M, MÜLLER M, CHENTANEZ N. XPBD: Position-based Simulation of Compliant Constrained Dynamics[C]. *Burlingame: the 9th International Conference on Motion in Games*, 2016.
- [24] 余方姝, 杨欣. 基于质点弹簧模型的实时布料模拟[J]. *现代计算机(专业版)*, 2018(5): 51-54.  
YU Fang-shu, YANG Xin. Real-Time Cloth Simulation Based on Mass-Spring Model[J]. *Modern Computer*, 2018(5): 51-54.
- [25] 万燕, 朱甜甜, 姚砺, 等. 基于弹簧投影模型的布料快速仿真[J]. *东华大学学报(自然科学版)*, 2020, 46(6): 929-934.
- WAN Yan, ZHU Tian-tian, YAO Li, et al. Fast Simulation of Cloth Based on Spring Projection Model[J]. *Journal of Donghua University (Natural Science)*, 2020, 46(6): 929-934.
- [26] LIU Tian-tian, BOUAZIZ S, KAVAN L. Quasi-newton Methods for Real-time Simulation of Hyperelastic Materials[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2017, 36(3): 1-16.
- [27] NARAIN R, OVERBY M, BROWN G E. ADMM  $\supseteq$  Projective Dynamics: Fast Simulation of General Constitutive Models[C]. *Zurich: Symposium on Computer Animation*, 2016.
- [28] DINEV D, LIU Tian-tian, LI Jing, et al. FEPR: Fast Energy Projection for Real-time Simulation of Deformable Objects[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2018, 37(4): 1-12.
- [29] KOSCHIER D, DEUL C, BENDER J. Hierarchical Hp-adaptive Signed Distance Fields[C]. *Zurich: Symposium on Computer Animation*, 2016.
- [30] WANG Xin-lei, TANG Min, MANOCHA D, et al. Efficient BVH - Based Collision Detection Scheme with Ordering and Restructuring[J]. *Computer Graphics Forum*, 2018, 37(2): 227-237.
- [31] TANG Min, LIU Zhong-yuan, TONG Ruo-feng, et al. PSCC: Parallel Self-collision Culling With Spatial Hashing on GPUs[J]. *Proceedings of the ACM on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 2018, 1(1): 1-18.
- [32] 刘忠源. GPU 加速的空间哈希碰撞检测算法[D]. 杭州: 浙江大学, 2018.  
LIU Zhong-yuan. GPU Accelerated Collision Detection Using Spatial Hashing[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2018.
- [33] TANG Min, WANG Tong-tong, LIU Zhong-yuan, et al. I-Cloth: Incremental Collision Handling for GPU-based Interactive Cloth Simulation[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2018, 37(6): 1-10.
- [34] 吕梦雅, 宛月茶, 赵伟, 等. 快速的布料碰撞检测和有效的接触摩擦算法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2020, 32(3): 392-400.  
LYU Meng-ya, WAN Yue-cha, ZHAO Wei, et al. Fast Cloth Collision Detection and Effective Contact Friction Algorithm[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2020, 32(3): 392-400.
- [35] LY M, JOUVE J, BOISSIEUX L, et al. Projective Dynamics with Dry Frictional Contact[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2020, 39(4): 1-57.
- [36] 胡婉月, 李艳梅, 王迎梅, 等. 虚拟试衣的发展现状及展望[J]. *上海工程技术大学学报*, 2014, 28(2): 162-165.  
HU Wan-yue, LI Yan-mei, WANG Ying-mei, et al. Development Status and Prospects of Virtual Fitting[J]. *Journal of Shanghai University of Engineering Science*, 2014, 28(2): 162-165.
- [37] 黎锋, 刘雅玲. 基于顾客视角的虚拟试衣系统发展及

- 对策研究[J]. 天津纺织科技, 2021(2): 23-27.
- LI Feng, LIU Ya-ling. Development and Countermeasures of Virtual Fitting System Based on Customer's Perspective[J]. Tianjin Textile Science & Technology, 2021(2): 23-27.
- [38] 孙小添, 肖伯祥, 刘正东. 群体演出活动服装虚拟仿真系统设计与实现[J]. 系统仿真学报, 2020, 32(11): 2282-2287.
- SUN Xiao-tian, XIAO Bo-xiang, LIU Zheng-dong. Design and Implementation of Cloth Virtual Simulation System for Group Performance[J]. Journal of System Simulation, 2020, 32(11): 2282-2287.
- [39] 张伟萌, 马芳. 基于 CLO3D 平台的汉服十字型结构探析[J]. 丝绸, 2021, 58(2): 131-136.
- ZHANG Wei-meng, MA Fang. Analysis of Cross Structure of Han Chinese Clothing Based on CLO3D Platform[J]. Journal of Silk, 2021, 58(2): 131-136.
- [40] FRATARCANGELI M, PELLACINI F. Scalable Partitioning for Parallel Position Based Dynamics[J]. Computer Graphics Forum, 2015, 34(2): 405-413.
- [41] 陈申华. 基于 GPU 加速的 PBD 仿真算法的研究与实现[D]. 杭州: 浙江大学, 2018.
- CHEN Shen-hua. Research and Implementation of a GPU-based PBD Simulation Algorithm[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2018.
- [42] WANG Hua-min. A Chebyshev Semi-iterative Approach for Accelerating Projective and Position-based Dynamics[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2015, 34(6): 1-9.
- [43] FRATARCANGELI M, TIBALDO V, PELLACINI F. Vivace: a Practical Gauss-seidel Method for Stable Soft Body Dynamics[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2016, 35(6): 1-9.
- [44] WANG Zhen-dong, WU Long-hua, FRATARCANGELI M, et al. Parallel Multigrid for Nonlinear Cloth Simulation[J]. Computer Graphics Forum, 2018, 37(7): 131-141.
- [45] MÜLLER M. Hierarchical Position Based Dynamics[C]. Hlohovec: In Proceedings of VRIPHYS, 2008.
- [46] XIAN Zang-yue-yang, TONG Xin, LIU Tian-tian. A Scalable Galerkin Multigrid Method for Real-time Simulation of Deformable Objects[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2019, 38(6): 1-13.

(上接第 8 页)

- [28] LIANG Y, FAN L, REN P, et al. DecorIn: an Automatic Method for Plane-based Decorating[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2020, 35(1): 1.
- [29] YEH C K, LIU Z, LIN H, et al. WYSIWYG Design of Hypnotic Line Art[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2020, 38(3): 1.
- [30] LI X, ZHANG B, LIAO J, et al. Deep Sketch-guided Cartoon Video Synthesis[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2020, 1(1): 1.
- [31] SIDDHARTHA C, VLADLEN K. Data-driven Suggestions for Creativity Support in 3D Modeling[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2010, 29(6): 1.
- [32] BOBENRIETH C, CORDIER F, HABIBI A, et al. Descriptive: Interactive 3D Shape Modeling from a Single Descriptive Sketch[J]. Computer-Aided Design, 2020, 128(1): 1.
- [33] FANG Q, ZHAO Z, LIU Z, et al. Metric First Reconstruction for Interactive Curvature-aware Modeling[J]. Computer-Aided Design, 2020, 126(1): 1.
- [34] PANDIAN V, SULERI S. BlackBox Toolkit: Intelligent Assistance to UI Design[J]. Research Gate, 2020, 1(1): 1.
- [35] SWEARNGIN A, WANG C, OLESON A, et al. Scout: Rapid Exploration of Interface Layout Alternatives through High-Level Design Constraints[C]. Sydney: CHI Conference on Human Factors in Computing Systems, 2020.
- [36] HUANG F, CANNY J F, NICHOLS J. Swire: Sketch-based User Interface Retrieval[C]. Glasgow: the 2019 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems, 2019.
- [37] CHEN S, FAN L, CHEN C, et al. Storydroid: Automated Generation of Storyboard for Android Apps[C]. Montreal: 2019 IEEE/ACM 41st International Conference on Software Engineering (ICSE), 2019.
- [38] DUBEY A, BHARDWAJ N, ABHINAV K, et al. AI Assisted Apparel Design[J]. Research Gate, 2020, 12(4): 1.
- [39] JEON Y, JIN S, KIM B, et al. FashionQ: an Interactive Tool for Analyzing Fashion Style Trend with Quantitative Criteria[C]. Sydney: CHI Conference on Human Factors in Computing Systems, 2020.
- [40] LIN Y, GUO J, CHEN Y, et al. It Is Your Turn: Collaborative Ideation with a Co-Creative Robot through Sketch[C]. Sydney: CHI Conference on Human Factors in Computing Systems, 2020.
- [41] 周子洪, 周志斌, 张于扬, 等. 人工智能赋能数字创意设计: 进展与趋势[J]. 计算机集成制造系统, 2020, 26(10): 2603-2614.
- ZHOU Zi-hong, ZHOU Zhi-bin, ZHANG Yu-yang, et al. Artificial Intelligence Empowers Digital Creative Design: Progress and Trends[J]. Computer Integrated Manufacturing System, 2020, 26(10): 2603-2614.
- [42] 高峰, 焦阳. 基于人工智能的辅助创意设计[J]. 装饰, 2019(11): 34-37.
- GAO Feng, JIAO Yang. Aided Creative Design Based on Artificial Intelligence[J]. Zhuangshi, 2019(11): 34-37.